Merkzettel „Differentialrechnung“

10.2.2016

Grundlagen:

1. MWS	Sei f(x) stetig auf [a,b] und diff. auf (a,b): $\exists\xi\in(a,b): f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Satz v. Rolle:	$f(a)=f(b): \exists\xi\in(a,b): f'(\xi)=0$
2. MWS	Sei f(x) stetig auf [a,b] und diff. auf (a,b): $\exists\xi\in(a,b): f'(\xi)\,(g(b)-g(a))=g'(\xi)\,(f(b)-f(a))$		
Stetig diff. auf (a,b):	$[\exists\, f'\, auf\ (a,b)\,]\wedge[f'\ stetig\ auf\ (a,b)]$	Stetig diff. auf [a,b]:	$[\text{stetig diff. auf } (a,b)]\wedge[\exists\ f'(a_+),f'(b_-)]$

Grundableitungen

$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(lg_a\, x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(e^x)'=e^x$	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$		$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$		$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$
$(\sinh x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$			$(\cosh x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$		
$(\tanh x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'=1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x}$			$(\operatorname{cotanh} x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)'=1-\operatorname{cotanh}^2 x=\frac{1}{\sinh^2 x}$		
$(\operatorname{arsinh} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\operatorname{arcosh} x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ (x>1)$		$(\operatorname{artanh} x)'=\frac{1}{1-x^2}\ (\lvert x\rvert<1)$		$(\operatorname{arcoth} x)'=\frac{1}{1-x^2}\ (\lvert x\rvert>1)$

Ableitungsmethoden:

$(fg)'=f'g+fg'$	$(fgh)'=f'gh+fg'h+fgh'$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$[f(g(x))]'=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$
$(f^g)'=\left(g'\ln f+\frac{f'g}{f}\right)f^g;\ \ wegen\ Ansatz: y=f^g\ \rightarrow\ \ln y=g\ln f\ \rightarrow\ \frac{\ln y}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}y'=g'\ln f+\frac{1}{f}f'g$			

Kurvendiskussion:

$y=f(x)$:	$NST: f(x_n)=0;$ $E: f'(x_e)=0\wedge[f''(x_e)\neq 0\vee erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung\ ist\ gerade]$ $MIN: f''(x_e)>0\vee[f''(x_e)=0\wedge erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung>0\ (\text{"}Sattelpunkt\text{"})]$ $MAX: f''(x_e)<0\vee[f''(x_e)=0\wedge erste\ an\ x_e\ nicht\ verschwindende\ Ableitung<0\ (\text{"}Sattelpunkt\text{"})]$ $W: f''(x_w)=0\wedge[f'''(x_w)\neq 0\vee erste\ an\ x_w\ nicht\ verschwindende\ Ableitung\ ist\ ungerade.]$ Konvex auf Intervall I: $f''(x)\geq 0$; strikt konvex: $f''(x)>0$; konkav: $f''(x)\leq 0$; strikt konkav: $f''(x)<0$; $\forall x\in I$.
$z=f(x,y)$:	$E: Löse\ Gleichungssystem\ z_x(x,y)=0;\ z_y(x,y)=0\rightarrow prüfe\ ob\ z_{xx}(x_e,y_e)z_{yy}(x_e,y_e)-z_{xy}(x_e,y_e)>0$ $MIN: z_{xx}(x_e,y_e)>0;\quad MAX: z_{xx}(x_e,y_e)<0$

Sonstiges:

Nabla Opera-tor:	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$	Gradient von $f(\vec{r})$:	$\operatorname{grad} f(\vec{r})=\vec{\nabla} f(\vec{r})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}\\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}\\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\end{pmatrix}$	Divergenz von $\vec{v}(\vec{r})$:	$\operatorname{div}\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\ v_y(\vec{r})\\ v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\ v_y(\vec{r})\\ v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x}+\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y}+\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z}$
Rotation von $\vec{v}(\vec{r})$:	$\operatorname{rot}\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\ v_y(\vec{r})\\ v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}v_x(\vec{r})\\ v_y(\vec{r})\\ v_z(\vec{r})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y}-\frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z}\\ \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z}-\frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x}\\ \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x}-\frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y}\end{pmatrix}$	Richtungs-ableitung Richtung $\vec{e}$:	$\frac{\partial f}{\partial\hat{e}}(\vec{r})=\vec{\nabla} f(\vec{r})\,\vec{e}$	Krüm-mung von $\vec{r}(t)$	$\mathcal{K}(t)=\frac{\lvert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\rvert}{\lvert\vec{r}'(t)\rvert^3}$
y=y(x): $\mathcal{K}$, Radius:	$\mathcal{K}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}};\ \rho=\frac{1}{\mathcal{K}}$	**y=y(x):** KK-Mittelpkt. KK-Gleichung:	$x_m=x-\frac{y'}{y''}(1+y'^2);\ \ y_m=y+\frac{1}{y''}(1+y'^2);\ (x-x_{mp})^2+(y-y_{mp})^2={\rho_p}^2$		
$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$: Krümmung $\mathcal{K}$	$\mathcal{K}(t)=\left\lvert\frac{x'(t)\,y''(t)-x''(t)\,y'(t)}{(x'(t)^2+y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}\right\rvert$	Fehlerabschätzung $\lvert\Delta f\rvert\ von\ f(x,y,z)$	$\lvert\Delta f\rvert=\left\lvert\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right\rvert+\left\lvert\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right\rvert+\left\lvert\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right\rvert$		
Ableitungsformel Parameterintegral:	Sei $I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dy$, dann ist $I'(x)=\int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy+b'(x)\,f(x,b(x))-a'(x)\,f(x,a(x))$				
Winkel ψ zwischen Leitstrahl und Tangente bei Polarkoordinatendarstellung r=f(φ)	$\psi=\arctan\frac{r}{r'}$				
Wronsky	$y_1(x)\ und\ \ y_2(x)\ sind\ linear\ unabhängig, wenn\ \exists x\in[a,b]: \det\begin{pmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{pmatrix}\neq 0$ („*Fundementalsystem*“)				

Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung in ℝ²:

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\dot{x}}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\qquad\qquad y''=\frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy'}{dt}\frac{1}{\dot{x}}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}$$

Differentialgleichungen (Grad: Höchste Potenz von $y^{(n)}$; Ordnung bzw. Rang: Höchste Ableitung n von $y^{(n)}$)

Homogene DG erster Ordnung mit trennbaren Variablen	$y' = f(x,y)$	$Umformen\ zu\ \frac{dy}{y} = f(x)\,dx \mid \int \to \ln y = \int f(x)$
Gleichgradige („homogene“) DG erster Ordnung	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$Ansatz: z = \frac{y}{x} \to y = xz \to y' = x'z + z'x = z + \frac{dz}{dx}x$
Homogene DG zweiter Ordnung, die sich auf homogene DG erster Ordnung zurückführen lässt	$y'' = f(x)$	Zweimaliges Integrieren
	$y'' = f(x,y')$ $y'' = f(y)$ $y'' = f(y,y')$	$Ansatz: y' = p \to y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$
	$y'' = f(y')$	$Ansatz: y' = p \to y'' = \frac{dp}{dx}$
Inhomogene DG erster Ordnung mit konstantem Koeffizienten → Prama I, 5.1	$y' = ay + s(x)$	$y(x) = Ce^{ax} + \int_{u=0}^{x} e^{a(x-u)}\,s(u)\,du$
Inhomogene DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten → Prama I, 5.2	$y' = a(x)\,y + s(x)$	$y(x) = Ce^{\Lambda(x)} + \int_{u=0}^{x} e^{\Lambda(x)-\Lambda(u)}\,s(u)\,du$ $\Lambda(x) = \int_{\tau=0}^{x} a(\tau)\,d\tau\,;\ \Lambda(x) - \Lambda(u) = \int_{\tau=u}^{x} a(\tau)\,d\tau$
Inhomogene DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten -> „Variation der Konstanten“	$y' + a(x)y = s(x)$	$Ermittle\ y_h(x,C) \to Ansatz\ y_p(x,c(x))$ $Ableitungen\ in\ DG\ einsetzen \to$ $c'(x)\ bestimmen \mid \int \to c(x) \to y = y_h + y_p(x,c(x))$
Inhomogene DG zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten: -> „Variation der Konstanten“	$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = s(x)$	$Ermittle\ y_{h1}(x), y_{h2}(x) \to y_h = c_1\,y_{h1}(x) + c_2 y_{h2}(x)$ $Ansatz:\ y_p(x) = c_1(x)\,y_{h1}(x) + c_2(x)\,y_{h2}(x) \to$ $GLS:\ \boldsymbol{y_{h1}(x)\,c_1'(x) + y_{h2}(x)\,c_2'(x) = 0}$ $\boldsymbol{y_{h1}'(x)\,c_1'(x) + y_{h2}'(x)\,c_2'(x) = s(x)} \to$ $c_i'(x)\ bestimmen \mid \int \to c_i(x) \to y = y_h + y_p(x,c_i(x))$
Lineare DG höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Homogene Lösung	$y'' + a_1y' + a_2y = 0$	Char. Gleichung („CG“) $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \to \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$
	$\mathbf{F1}: \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_h = C_1e^{\lambda_{1,}x} + C_2e^{\lambda_{2,}x} + \cdots$
	$\mathbf{F2}: \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_h = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x} + \cdots$
	$\mathbf{F3}: \lambda_1 = \alpha + i\beta;\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$	$y_h = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x) + \cdots$
Inhomogene lineare DG höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen Inhomogene Lösung:	$y'' + a_1y' + a_2y = s(x)$	Ansatz y_p (s.u.), ableiten, in DG einsetzen, Koeffizientenvergleich
	$\mathbf{F1}: s(x) = Polynom\ Grad\ n$	$y_p = b_o + b_1x + b_2x^2 + - \cdots + b_rx^n$
	$\mathbf{F2}: s(x) = ae^{mx}$	- m ist keine Wurzel der CG: $y_p = be^{mx}$ - m ist einfache Wurzel der CG: $y_p = bxe^{mx}$ - m ist doppelte Wurzel der CG: $y_p = bx^2e^{mx}$
	$\mathbf{F3}: s(x) = a \sin\omega x + b \cos\omega x$	- $\sin\omega x$ und $\cos\omega x$ nicht in y_h: $y_p = A \sin\omega x + B \cos\omega x$ - $\sin\omega x$ oder $\cos\omega x$ Teil von y_h: $y_p = Ax \sin\omega x + Bx \cos\omega x$
	F4: Kombination aus F1, F2 und F3 (additiv oder multiplikativ)	Additive oder multiplikative Kombination aus den entsprechenden Ansätzen für y_p
Spezialansatz für inhomogene lineare DG erster Ordnung mit variablem Koeffizienten und Störfunktion der Form xy^n	$y' + a(x)y = xy^n$	$z = y^{1-n} \to berechne\ y(z) \to y' = \frac{dy}{dz}z' \to$ $DG\ z' + a(x)z = x \to l\ddot{o}sen\ in\ z$
Exakte, nicht separable DG erster Ordnung	$p(x,y) + q(x,y)y' = 0 \to$ $p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = 0$ $wobei\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$	$Pr\ddot{u}fe: \frac{\partial p}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial q}{\partial x} \to wenn\ nein: finde\ int. Faktor\ a(x,y) \to$ $\phi(x,y) = \int p(x,y)\,dx + C(y) = \int q(x,y)\,dx + D(x) \to$ $\to bestimme\ C(y)\ und\ D(x) \to l\ddot{o}se\ \phi(x,y)\ nach\ y\ auf.$
Ermittlung des integrierenden Faktors	$\frac{\partial p}{\partial y} = p'(x) \wedge \frac{\partial q}{\partial x} = q'(x), oder$ $\frac{\partial p}{\partial y} = p'(y) \wedge \frac{\partial q}{\partial x} = q'(y)$	$z.B.\ x: L\ddot{o}se\ DG\ \frac{\partial}{\partial y}[p(x,y)a(x)] = \frac{\partial}{\partial x}[q(x,y)a(x)]\ nach\ a$ $mittels\ Separation\ der\ Variablen$
	$\frac{\partial p}{\partial y} = p'(x,y) \vee \frac{\partial q}{\partial x} = q'(x,y)$ $und\ p\ und\ q\ sind\ Polynome.$	$\frac{\partial}{\partial y}[p(x,y)x^\alpha y^\beta] = \frac{\partial}{\partial x}[q(x,y)x^\alpha y^\beta] \to$ $aufl\ddot{o}sen\ nach\ \alpha\ und\ \beta\ mit\ KV\ f\ddot{u}r\ alle\ x^ny^n$
Schwingende Feder mit Dämpfung	$F = F_{grav} - F_{d\ddot{a}mpf} - F_{Feder}$ $ma = mg - rv - ku$	$m\ddot{u} = mg - r\dot{u} - ku$ $\ddot{u} = g - \frac{r}{m}\dot{u} - \frac{k}{m}u$ $\ddot{u} + \frac{r}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = g$ $\ddot{u} + 2\rho\dot{u} + \omega_0^2u = g$ $\rho = \frac{r}{2m};\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$