Merkzettel „Analysis-Diverses“ II

14.02.2017

Zahlen	Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{N}_0=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; ganze Zahlen $\mathbb{Z}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ = {„Menge der gekürzten Brüche“}, Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{\mathbb{Q}$ + irrationale Zahlen$\}$; komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{\mathbb{R}$ + imaginäre Zahlen$\}$		
Potenzen	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
Auf ganzes Quadrat bringen:	$\alpha x^2 + \beta x = \left(\sqrt{\alpha}x\right)^2 + 2\frac{\beta}{2}x + \left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}x + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha}$		
	$\alpha x^2 + \beta x^2 = \left(\sqrt{\alpha}x\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}x\right)^2 + 2x^2\sqrt{\alpha\beta} - 2x^2\sqrt{\alpha\beta} = \left(\sqrt{\alpha}x + \sqrt{\beta}x\right)^2 - 2x^2\sqrt{\alpha\beta}$		
n ∈ $\mathbb{G}$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2)$	$a^6 - b^6 = (a^3-b^3)(a^3+b^3)$
n ∈ $\mathbb{C}$	$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$		
n ∈ $\mathbb{U}$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$	$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$	
	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$	$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$	
$z^2(a+b)^2 = (za+zb)^2$	$z(a+b)^2 = \frac{1}{z}(za+zb)^2$		
Periodische Zahlen in Bruch umwandeln:	$0,\dot{1}23\dot{4} = \frac{1234}{9999}$	$0{,}98\dot{1}2\dot{3} = \frac{98\,025}{99\,900}$; *weil:*	$\begin{array}{rr} 100\,000x = & 98123,\dot{1}2\dot{3} \\ 100x = & 98,\dot{1}2\dot{3} \\ \hline 99\,900x = & 98025{,}000 \end{array} \Big\}-$
Ungleichungen:	Bei Multiplikation mit negativer Zahl: Umkehr des Vergleichsoperators. Bei Ungleichungen mit Brüchen gesonderte Betrachtung Nenner>0 und Nenner<0		
Rechnen mit Logarithmen	$\log(u\cdot v) = \log u + \log v$; $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v$; $\log(u^n) = n\log u$; $\log\sqrt[n]{u} = \frac{\log u}{n}$; $\lg_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$		
Rechnen mit Potenzen	$a^{n+m} = a^n a^m$; $a^{n-m} = a^n a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}$; $(a^n)^m = a^{nm}$; $a^n b^n = (ab)^n$; $a^x = e^{x\ln a}$		
$a^x = b^x \to x = 0$	$a^x + a^{x+n} = b^x + b^{x+m} \to a^x(1+a^n) = b^x(1+b^n) \to Aa^x = Bb^x \to \ln A + \ln a^x = \ln B + \ln b^x \to$		
$\frac{\ln A}{\ln a} + x = \frac{\ln B}{\ln a} + \frac{\ln b^x}{\ln a} \to \ln A + x\ln a = \ln B + \ln b^x \to \frac{\ln A}{\ln b} + \frac{x\ln a}{\ln b} = \frac{\ln B}{\ln b} + x \to \ln A + x\ln a = \ln B + x\ln b \to x = \cdots$			

Komplexe Zahlen

Karthesische Binomialform	Polarform		
$\underline{z} = x + iy$ $x = \lvert\underline{z}\rvert\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(\underline{z} + \bar{\underline{z}})$ $y = \lvert\underline{z}\rvert\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(\underline{z} - \bar{\underline{z}})$	$\underline{z} = \lvert\underline{z}\rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \lvert\underline{z}\rvert e^{i\varphi}$ $\lvert\underline{z}\rvert = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\underline{z}\bar{\underline{z}}}$	$\varphi = \arg(\underline{z}) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right); & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi; & x < 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi; & x < 0, y \geq 0 \\ +\frac{\pi}{2}; & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & x = 0, y < 0 \end{cases}$	$\left\lvert\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right\rvert^2 = \frac{\underline{z}_1\bar{\underline{z}}_1}{\underline{z}_2\bar{\underline{z}}_2}$
Konjungiert komplex	Konjungiert komplex		
$\bar{\underline{z}} = \underline{z}^* = x - iy$	$\bar{\underline{z}} = \underline{z}^* = \lvert\underline{z}\rvert e^{-i\varphi}$		

Elementare Funktionen im Komplexen

$\boldsymbol{e^{\underline{z}} = \exp(\underline{z})}$:	$e^{x+iy} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+iy)^n}{n!} = e^x(\cos y + i\sin y)$	$\lvert e^{\underline{z}}\rvert = e^{\mathrm{Re}(\underline{z})}$	$\arg(e^{\underline{z}}) = \mathrm{Im}(\underline{z})$	$e^{\underline{z}+2\pi ki} = e^{\underline{z}}$; $k \in \mathbb{Z}$
Euler: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.	Moivre: $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$	$e^{\underline{z}} = e^{\underline{z}_0}e^{\underline{z}-\underline{z}_0} = e^{\underline{z}_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\underline{z}-\underline{z}_0)^n}{n!}$		
$\boldsymbol{\ln(\underline{z})}$	Hauptzweig:	$\ln(\underline{z}) = \ln\lvert\underline{z}\rvert + i\arg(\underline{z})$	k-ter Nebenzweig:	$\log\underline{z} = \ln_k(\underline{z}) = \ln\lvert\underline{z}\rvert + i(\arg\underline{z} + 2k\pi)$; $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
$\boldsymbol{\underline{z}^{\underline{c}}}$	Hauptzweig:	$\underline{z}^{\underline{c}} = e^{\underline{c}\ln(\underline{z})} = \exp(\underline{c}\ln(\underline{z}))$	k-ter Nebenzweig:	$\left(\underline{z}^{\underline{c}}\right)_k = e^{\underline{c}\ln_k(\underline{z})} = \exp(\underline{c}\ln_k(\underline{z}))$; $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
$\boldsymbol{\sqrt[n]{\underline{z}}}$	$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{\lvert\underline{z}\rvert e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\lvert\underline{z}\rvert}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right] = \sqrt[n]{\lvert\underline{z}\rvert e^{i(\varphi/n + 2\pi k/n)}}$; $k = 0 \ldots n-1$ $(k = 0$ *ist Hauptzweig*$)$			
$\boldsymbol{\cos(\underline{z})}$	$\cos(\underline{z}) = \cos(x+iy) = \mathrm{Re}(e^{i\underline{z}}) = \frac{e^{i\underline{z}}+e^{-i\underline{z}}}{2} = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y) = \cosh(i\underline{z})$			$\overline{\cos(\underline{z})} = \cos(\bar{\underline{z}})$
$\boldsymbol{\sin(\underline{z})}$	$\sin(\underline{z}) = \sin(x+iy) = \mathrm{Im}(e^{i\underline{z}}) = \frac{e^{i\underline{z}}-e^{-i\underline{z}}}{2i} = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y) = -i\sinh(i\underline{z})$			$\overline{\sin(\underline{z})} = \sin(\bar{\underline{z}})$
$\boldsymbol{\cosh(\underline{z})}$	$\cosh(\underline{z}) = \cosh(x+iy) = \frac{e^{\underline{z}}+e^{-\underline{z}}}{2} = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y)$			
$\boldsymbol{\sinh(\underline{z})}$	$\sinh(\underline{z}) = \sinh(x+iy) = \frac{e^{\underline{z}}-e^{-\underline{z}}}{2} = \sinh(x)\cos(y) + i\cosh(x)\sin(y)$			

Quadratische Gleichung

Kleine Lösungsformel	p und q aus Nullstellen x_1 und x_2	Große Lösungsformel
$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1x_2 = q$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Beweis durch vollständige Induktion:

Beweise $\sum_{i=1}^{n} u_n = \mathrm{f}(n)$	II.: n⟶n+1	Beh.: $\sum_{i=1}^{n+1} u_n = \mathrm{f}(n+1)$
I.: A(1): Prüfe $\sum_{i=1}^{1} u_n = \mathrm{f}(1)$	Ann.: $\sum_{i=1}^{n} u_n = \mathrm{f}(n)$	Bew.: $\sum_{i=1}^{n}(a_n) + a_{n+1} = \mathrm{f}(n+1) \overset{ind.}{\longrightarrow} \mathrm{f}(n) + a_{n+1} = \mathrm{f}(n+1)$

Ansatz Partialbruchzerlegung bei gebrochen rationalen Polynomfunktionen (Grad Zähler < Nenner):

pro einfacher reeller NST	pro mehrfacher reeller NST	pro komplexer NST a ± bi:
$\dfrac{A_n}{x - x_n}$	$\dfrac{A_n}{x - x_n} + \dfrac{B_n}{(x - x_n)^2} + \cdots$	$\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q} \triangleq \dfrac{Ax + B}{(x - c)(x - \bar{c})} \triangleq \dfrac{Ax + B}{x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)}$

Analytische Geometrie

Gerade:	$y = kx + d$ $ax + by = c$	$\mathrm{P_1}$/k: $y - y_1 = k(x - x_1)$	$\mathrm{P_1}$/ P: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	$\varphi = \arctan\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$
Kreis	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$	Spaltgleichung: $x_0 x + y_0 y = r^2$; oder allgemein: $(x_0 - x_m)(x - x_m) + (y_0 - y_m)(y - y_m) = r^2$	
Parabel	$y = ax^2$	$(y - y_s) = a(x - x_s)^2$	Spaltgleichung $\dfrac{y_0 + y}{2} = a x_0 x$	a>0: nach oben offen ay<0: nach unten offen
Ellipse	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x - x_m)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$	Spaltgleichung $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$	
Hyperbel	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x - x_m)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$	Spaltgleichung $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$	

Regel von de l'Hôspital

Ausdruck $\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)}$ = „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$"	**$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x) =$ „$0 \cdot \infty$"**	**$\mathrm{f}(x)^{\mathrm{g}(x)} =$ „1^∞"; „0^0" oder „∞^0"**	**$\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x) =$ „$\infty - \infty$"**
$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)} = \lim\limits_{x\to c}\dfrac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{g}'(x)}$	$\lim_{x\to c}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x) =$ $\lim_{x\to x}\frac{\mathrm{f}(x)}{\frac{1}{\mathrm{g}(x)}} =$ „$\frac{0}{0}$"	$\lim\limits_{x\to c}\mathrm{f}(x)^{\mathrm{g}(x)} = e^{\lim_{x\to c}\mathrm{g}(x)\ln(\mathrm{f}(x))} =$ „$e^{\infty\cdot 0}$" oder „$e^{0\cdot\infty}$"	$\lim_{x\to c}(\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)) =$ $\lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{\mathrm{g}(x)} - \frac{1}{\mathrm{f}(x)}}{\frac{1}{\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)}} =$ „$\frac{0}{0}$"

Sonstiges

Binomialkoeffizient:	$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$	$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$	$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
Lagrange-Polynom:	$Geg.: \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\};\ \varphi_i(x) = \prod_{j=1;j\neq i}^{n}\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)};\ \mathrm{p}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\varphi_i(x)$				
Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Negation: $\neg(\forall x \in M{:}\, A(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in M{:}\, \neg A(x))$	$\neg(\exists x \in M{:}\, A(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in M{:}\, \neg A(x))$			
Injektiv: $\forall a_1, a_2 \in A{:}\ a_1 \neq a_2{:}\ \mathrm{f}(a_1) \neq \mathrm{f}(a_2)$	Surjektiv: $\forall b \in B{:}\ \exists a \in A{:}\ b = \mathrm{f}(a)$	bijektiv = injektiv ∧ surjektiv			
Dreiecksungleichungen: $\lvert x \pm y\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert y\rvert;\ \lvert x \pm y\rvert \geq \big\lvert \lvert x\rvert - \lvert y\rvert \big\rvert$	Komposition: $g \circ f = \mathrm{g}(\mathrm{f}(a))$				
Cauchy-Schwarz-Ungleichung: in $\mathbb{R}$: $xy \leq \lvert x\rvert\lvert y\rvert, im\ Vektoraum{:}\ \lvert\langle x, y\rangle\rvert \leq \lVert x\rVert\lVert y\rVert$					
Hilfreiche Abschätz-ungen:	$sei\ a, b, c > 0{:}\ a - b + c \leq a + c$	$sei\ m > n > 0{:}\ \frac{a}{n} + \frac{a}{m} \leq \frac{2a}{n}$	$sei\ 0 < a < 1, m > n > 0{:}\ a^n + a^m \leq 2a^n$		
	$sei\ m > n > 0{:}\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{n}$	$\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	$\max(ab) = \max(a)\max(b)$	$\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,dx \leq \max\limits_{a\leq x\leq b}(\mathrm{g}(x))\int_a^b \mathrm{g}(x)\,dx$	
	$\left\lvert\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx\right\rvert \leq \int_a^b \lvert\mathrm{f}(x)\rvert\,dx \leq \max\limits_{a\leq x\leq b}\lvert\mathrm{f}(x)\rvert\,(b - a) = \lVert\mathrm{f}(x)\rVert_\infty(b - a)$				
Gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$	Ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$	$\mathrm{f}_G(x) = \dfrac{\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(-x)}{2};\ \mathrm{f}_U(x) = \dfrac{\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(-x)}{2}$			
Konvex: $\mathrm{f}\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \leq (1-\lambda)\,\mathrm{f}(x_1) + \lambda\,\mathrm{f}(x_2);\ \lambda \in (0,1)$	Konkav: $\mathrm{f}\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \geq (1-\lambda)\,\mathrm{f}(x_1) + \lambda\,\mathrm{f}(x_2);\ \lambda \in (0,1)$				
Stetig an c: $\lim_{x\to c}\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(c) \iff \forall\varepsilon > 0{:}\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0{:}\ \forall x{:}\ \lvert c - x\rvert < \delta{:}\ \lvert\mathrm{f}(c) - \mathrm{f}(x)\rvert < \varepsilon$	Hebbar unstetig: $\lim_{x\to c_-}\mathrm{f}(x) = \lim_{x\to c_+}\mathrm{f}(x)$				
Gleichmäßig stetig: $\forall\varepsilon > 0{:}\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0{:}\ \forall x_1, x_2{:}\ \lvert x_1 - x_2\rvert < \delta{:}\ \lvert\mathrm{f}(x_1) - \mathrm{f}(x_2)\rvert < \varepsilon$					
Lipschitz-stetig: $\forall x_1, x_2 \in I{:}\ \lvert\mathrm{f}(x_1) - \mathrm{f}(x_2)\rvert \leq L\lvert x_1 - x_2\rvert$	Lipschitz-stetig ⟹ gleichmäßig stetig: $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L$				
Eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt.					
Analytische Funktion: Sei $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$. Eine Funktion $f{:}\, D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt ***analytisch*** im Punkt $x_0 \in D$, wenn es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ gibt, die auf einer Umgebung von x_0 gegen $\mathrm{f}(x)$ konvergiert. Eigenschaften: (1) analytisch ⟹ glatt (2) lokale Potenzreihe = Taylorreihe; d.h.: $a_n = \frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}$ (3) Nur wenn $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$, dann gilt: analytisch ⟺ holomorph (4) Verkettungen analytischer Funktionen sind wieder analytisch.					
Holomorphe Funktion: Eine Funktion $f{:}\, D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt ***holomorph***, wenn sie in jedem Punkt von D komplex differenzierbar ist.					
Glatte Funktion: Eine Funktion $f{:}\, D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ***glatt***, wenn sie unendlich oft (stetig) differenzierbar ist.					

Funktionenräume

Norm. Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$:	Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit definierter Norm $V \to \mathbb{R}_0^+: \vec{x} \to \|\vec{x}\|$: $(\|s\vec{x}\| = \|s\|\|\vec{x}\|) \wedge (\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|) \wedge (\|\vec{x}\| \geq 0;\ \|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0})$
$\max\limits_{a \le x \le b}(\|f(x)\| + \|g(x)\|) \leq \max\limits_{a \le x \le b}(\|f(x)\|) + \max\limits_{a \le x \le b}(\|g(x)\|)$	
Funktional f	Sei V ein Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$. V kann auch ein Funktionenraum sein. Ein Funktional $f: V \to \mathbb{K}$ nimmt einen Vektor aus V als Input, und liefert einen Skalar $\in \mathbb{K}$ als Output
Lineares Funktional (LF)	f ist ein *Lineares Funktional* (LF) auf V, wenn: $f: V \to \mathbb{K}$: $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)\ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränktes LF	Ein LF auf dem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|f(x)\| \leq K\|x\|\ \forall x \in V$
Norm des LF	Das kleinstmögliche K (s.o.) heißt *Norm* des Linearen Funktionals f: $\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ 1-Norm: $\|f\|_1 = \int_a^b \|f(x)\|\, dx$ 2-Norm: $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}$ Maximum Norm: $\|f\|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} \|f(x)\|$
Stetigkeit des LF	f: $stetig \Leftrightarrow beschränkt;\ \ stetig \Rightarrow lipschitz - stetig$
Operator F	Sei V ein Funktionenraum. Ein Operator $F: V \to U$ ist eine Abbildung zwischen den Funktionenräumen V und U
Linearer Operator (LO)	Seien$(V, \|\cdot\|_V)$ und $(U, \|\cdot\|_U)$ normierte (Funktionen)räume über $\mathbb{K}$. F ist ein *Linear Operator* (LO) auf V, wenn: $F: V \to U$: $F(\lambda x + \mu y) = \lambda F + \mu F(y)\ \forall x, y \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Beschränkter LO	Ein LO $F: V \to U$ heißt *beschränkt,* wenn $\exists K > 0$: $\|F(x)\|_U \leq K\|x\|_V\ \forall x \in V$
Norm des LO	Das kleinstmögliche K (s.o.) heißt *Norm* des Lin. Operators F: $\|F\|_{V \leftarrow U} = \sup_{\|x\|_V \neq 0} \frac{\|F(x)\|_U}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|F(x)\|_U$ 1-Norm: $\|F(f)\|_1 = \int_a^b \|F(f(x))\|\, dx$ 2-Norm: $\|F(f)\|_2 = \sqrt{\int_a^b (F(f(x)))^2\, dx}$ Max.-Norm: $\|F(f)\|_\infty = \max\limits_{a \le x \le b} \|F(f(x))\|$
Stetigkeit des LO	F: $stetig \Leftrightarrow beschränkt;$
Banachraum	Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist *vollständig*, wenn jede in V verlaufende Cauchyfolge konvergent ist; d.h. wenn ihr Grenzwert auch in V liegt. (Anm.: Für jede Teilmenge eines vollständigen normierten Raumes ist ihr Abschluss ein vollständiger Teilraum.) Ein vollständiger normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*. Beispiele für endlichdimensionale Banachräume: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, Raum aller Polynome vom Maximalgrad n,... Beispiel für ∞-dimensionalen Banchraum: Raum d. stetigen Funktionen auf kompaktem Intervall $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$
Raum $L^1(a,b)$	Der vervollständigte Funktionenraum $\{f: C[0,\infty) \to \mathbb{R}; \|f\|_1 < \infty\}$ mit $\|f\|_1 = \int_0^\infty \|f(x)\|\, dx$ wird als *Raum der absolut integrierbaren Funktionen* $L^1[0,\infty)$ bezeichnet. Für $\forall f \in L^1[0,\infty)$ gibt es eine Funktionenfolge $(f_n) \in C[0,\infty)$, so dass $\lim_{n\to\infty} f_n = f^*$. Daher ist $\|f^*\|_1 = \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_1$. Statt $L^1[0,\infty)$ geht auch $L^1[a,b]$. • $f_n \in L^1 \Leftrightarrow \forall n: \|f_n\|_1 < \infty$ • f_n konvergiert in L^1 $\Leftrightarrow$ f_n ist eine Cauchyfolge in L^1 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall m, n \geq N(\varepsilon): \|f_m - f_n\|_1 < \varepsilon$
Banach'scher Fixpunktsatz	Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und (1) F selbstabbildend, d.h. $F: V \to V$ und (2) eine kontrahierende Abbildung, d.h.: $\exists L \in (0,1)$: $\|F(f) - F(\tilde{f})\| \leq L\|f - \tilde{f}\|\ \forall f, \tilde{f} \in V$. Dann hat F *genau einen Fixpunkt* $f^* \in V: f^* = F(f^*)$
Prähilbertraum	Ein Vektorraum, in dem ein inneres Produkt definiert ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, heißt *Prähilbertraum*. Damit es ein inneres Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ geben kann, muss im Raum die Norm $\|\cdot\|_2$ definiert sein, bzw. das Innere Produkt *induziert* die Norm: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \ \forall x \in V$. Für $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ spricht man auch von einem *euklidischen Raum*, für $\mathbb{K}$=$\mathbb{C}$ von einem *unitären Raum*. In einem Prähilbertraum ist *„Orthogonalität"* x⊥y definiert $(x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0)$, und es existieren *Orthonormalbasen*.
Inneres Produkt	Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Das innere Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle: V \times V \to \mathbb{K}$ muss folgende Eigenschaften haben: - Linearität im ersten Argument: $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle\ \ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (für $\langle x, y\rangle = \sum \bar{x}_i y_i$) - Hermite-Eigenschaft: $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}\ \ \forall x, y \in V$ - Definitheit: $\langle x, x\rangle \geq 0\ \forall x \in V\ \wedge\ \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Aus Linearität im ersten Argument und Hermite-Eigenschaft folgt konjugierte Linearität im zweiten Argument: $\langle z, \lambda x + \mu y\rangle = \bar{\lambda}\langle z, x\rangle + \bar{\mu}\langle z, y\rangle\ \ \forall x, y, z \in V;\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
Pythagoras	$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ Cauchy-Schwarz: $\|\langle x, y\rangle\| \leq \|x\|\|y\|$
Parallelogrammgleichg.	$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ für $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$. $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$
Hilbertraum	Ein vollständiger Prähilbertraum $(\bar{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt Hilbertraum H. Für alle $x, y \in H$ gibt es Folgen $(x_n), (y_n)$, die gegen x bzw. y konvergieren. $\Rightarrow \boldsymbol{\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, y_n\rangle}$.
Raum $L^2(a,b)$	Der Raum $V = C[a,b]$ über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $\boldsymbol{\langle f, g\rangle_2 = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx}$ und $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle_2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx}$ wird durch Vervollständigung zum Hilbertraum $H = (L^2(a,b), \|\cdot\|_2)$, dem *Raum der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen*. $L^2(a,b)$ besteht aus Funktionenklassen $L^2(a,b) = \{f_{class}(f^*): \|f^*\|_2 < \infty\}$. Jede Funktionenklasse $f_{class}(f^*)$ besteht aus allen äquivalenten Funktionen, für die gilt: $\|f - f^*\| = 0$ (das sind insb. Funktionen, die sich nur an endlich vielen Stellen punktweise unterscheiden). • $f_n \in L^2 \Leftrightarrow \forall n: \|f_n\|_2 < \infty$ • f_n konvergiert in L^2 $\Leftrightarrow$ f_n ist eine Cauchy-Folge in L^2 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0: \exists N(\varepsilon): \forall m, n \geq N(\varepsilon): \|f_m - f_n\|_2 < \varepsilon$
Raum l^2	Der Raum l^2 ist der Raum der in der 2-Norm beschränkten Folgen: $l^2 = \{u = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}: \|u\|_2 < \infty\}$ mit $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \sum_{k=1}^\infty \boldsymbol{u_k v_k}$ und $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty u_k^2}$ • $u \in l^2 \Leftrightarrow \|u\|_2 < \infty \Leftrightarrow \|u\|_2^2 < \infty \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty u_k^2 < \infty$

Orthogonalräume, Orthogonalprojektion

Orthogonale Vektoren	Sei V ein Prähilbertraum, und $x, y \in V$. Dann gilt: $\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
Orthogonale Unterräume	Sei V ein Prähilbertraum und $M, N \subseteq V$. Dann ist $M \perp N$, wenn $\forall x \in M, \forall y \in N: x \perp y$
Orthogonalraum	Sei V ein Prähilbertraum und $M \subseteq V$. Der Orthogonalraum $M^{\perp} = \{\forall x \in V: x \perp M\}$
Orthogonaler Projektionssatz	Sei U ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann gibt es für jedes $x \in H$ genau ein $u \in U$, so dass $\|u - x\| = \min_{v \in U}\|v - x\|$. Dann gilt: $(u - x) \in U^{\perp}$ und $H = U \oplus U^{\perp}$.
Orthogonalprojektoren	Sei U ein abgeschlossener Unterraum von H. Dann sind die Orthogonalprojektoren P und Q Abbildungen $x \in H \mapsto Px \in U$ und $x \in H \mapsto Px \in U^{\perp}$, die x eindeutig zerlegen in $x = Px + Qx$ mit $Px \perp Qx$. Für Orthogonalprojektoren gilt immer: $PPx = Px$ und $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$.
Orthogonalprojektion auf endlichdimensionalen Unterraum	Sei U ein m-dimensionaler Unterraum von H und $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ eine ONB von U. Dann ist für jedes $x \in H$ die Bestapproximierende $Px \in U$ gegeben mit $Px = \sum_{k=1}^{m}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k$
Separabler Hilbertraum	H ist separabel, wenn in H eine abzählbare ONB $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ existiert, d.h. $\forall x \in H: x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, \varphi_k\rangle\varphi_k$. $L^2(a, b)$ ist separabel.
Trigonometrisches Fundamentalsystem (TRFS)	$\{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \dots\}$ ist ein OGS in $L^2(-\pi, \pi)$
Trigonometrische ONB	$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}}, \dots\right\}$ ist eine ONB in $L^2(-\pi, \pi)$ (→ Fourier!)
Besselsche Ungleichung	Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ein ∞-dimensionales ONS in H. Dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty}\lvert\langle x, \varphi_k\rangle\rvert^2 \le \|x\|^2$ („Projektion ist kürzer")
Parseval'sche Gleichung	Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ein ∞-dimensionales ONB in H. Dann gilt: $\sum_{k=1}^{\infty}\lvert\langle x, \varphi_k\rangle\rvert^2 = \|x\|^2$ Im TRFS: $\frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_a^b f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ … mit a_k F.-Koeff. für $\cos(nx)$ und b_k für $\sin(nx)$

Erweitertes Horner-Schema:

$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

P_5 / x_0	a_3	a_2	a_1	a_0	
	a_3 /	a_2 $+x_0a_3$	a_1 $+x_0\sum_2$	a_0 $+x_0\sum_1$	
x_0	a_3 /	$\sum_2$ $+x_0a_3$	$\sum_1$ $+x_0\sum_2$	$\sum_0$	$\cdot\, 0! = P(x_0)$
x_0	a_3 /	$\sum_2$ $+x_0a_3$	$\sum_1$	$\cdot\, 1! = P'(x_0)$	
x_0	a_3 /	$\sum_2$	$\cdot\, 2! = P''(x_0)$		