Merkzettel „Analysis-Diverses“

02.09.2016

Zahlen	Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbb{N}_0=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; ganze Zahlen $\mathbb{G}=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ = {„Menge der gekürzten Brüche“}, Reelle Zahlen $\mathbb{R} = \{\mathbb{Q}$ + irrationale Zahlen}; komplexe Zahlen $\mathbb{C} = \{\mathbb{R} +$ imaginäre Zahlen}		
Potenzen	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
n ∈ $\mathbb{G}$	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^4 - b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2)$	$a^6 - b^6 = (a^3-b^3)(a^3+b^3)$
n ∈ $\mathbb{C}$	$a^2 + b^2 = (a+ib)(a-ib)$		
n ∈ $\mathbb{U}$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$	$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$	
	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$	$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$	
$z^2(a+b)^2 = (za+zb)^2$	$z(a+b)^2 = \frac{1}{z}(za+zb)^2$		
Periodische Zahlen in Bruch umwandeln:	$0,\dot{1}23\dot{4} = \frac{1234}{9999}$	$0{,}98\dot{1}2\dot{3} = \frac{98\,025}{99\,900}$; *weil:*	$\begin{array}{rr} 100\,000x = & 98123,\dot{1}2\dot{3} \\ 100x = & 98,\dot{1}2\dot{3} \\ \hline 99\,900x = & 98025{,}000 \end{array} \Big\}-$
Ungleichungen:	Bei Multiplikation mit negativer Zahl: Umkehr des Vergleichsoperators. Bei Ungleichungen mit Brüchen gesonderte Betrachtung Nenner>0 und Nenner<0		
Rechnen mit Logarithmen	$\log(u\cdot v) = \log u + \log v\,;\ \ \log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v\,;\ \ \log(u^n) = n\log u\,;\ \ \log\sqrt[n]{u} = \frac{\log u}{n};\ \ \lg_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$		
Rechnen mit Potenzen	$a^{n+m} = a^n a^m;\ \ a^{n-m} = a^n a^{-m} = \frac{a^n}{a^m};\ \ (a^n)^m = a^{nm};\ \ a^n b^n = (ab)^n;\ \ a^x = e^{x\ln a}$		
$a^x = b^x \to x = 0$	$a^x + a^{x+n} = b^x + b^{x+m} \to\ a^x(1+a^n) = b^x(1+b^n) \to Aa^x = Bb^x \to \ln A + \ln a^x = \ln B + \ln b^x \to$		

$\frac{\ln A}{\ln a} + x = \frac{\ln B}{\ln a} + \frac{\ln b^x}{\ln a} \to \ln A + x\ln a = \ln B + \ln b^x \to \frac{\ln A}{\ln b} + \frac{x\ln a}{\ln b} = \frac{\ln B}{\ln b} + x \to\ \ln A + x\ln a = \ln B + x\ln b \to x = \cdots$

Komplexe Zahlen

Karthesische Binomialform	Polarform	
$z = a + bi$ $a = \lvert z\rvert\cos(\varphi) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ $b = \lvert z\rvert\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$	$z = \lvert z\rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \lvert z\rvert e^{i\varphi}$ $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$	$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right); & a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi; & a < 0, b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi; & a < 0, b \geq 0 \\ +\frac{\pi}{2}; & a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & a = 0, b < 0 \end{cases}$
Komplexe n-te Wurzel von w ("$z^n = w$")	$z_k = \sqrt[n]{\lvert w\rvert}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right]\quad k = 0\ldots n-1$	

Quadratische Gleichung

Kleine Lösungsformel	p und q aus Nullstellen x_1 und x_2	Große Lösungsformel
$x^2 + px + q = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1 x_2 = q$	$ax^2 + bx + c = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Beweis durch vollständige Induktion:

Beweise $\sum_{i=1}^{n} u_n = \mathrm{f}(n)$	II.: n⟶n+1	Beh.: $\sum_{i=1}^{n+1} u_n = \mathrm{f}(n+1)$
I.: A(1): Prüfe $\sum_{i=1}^{1} u_n = \mathrm{f}(1)$	Ann.: $\sum_{i=1}^{n} u_n = \mathrm{f}(n)$	Bew.: $\sum_{i=1}^{n}(a_n) + a_{n+1} = \mathrm{f}(n+1) \overset{ind.}{\longrightarrow} \mathrm{f}(n) + a_{n+1} = \mathrm{f}(n+1)$

Ansatz Partialbruchzerlegung bei gebrochen rationalen Polynomfunktionen (Grad Zähler < Nenner):

pro einfacher reeller NST	pro mehrfacher reeller NST	pro komplexer NST a ± bi:
$\frac{A_n}{x - x_n}$	$\frac{A_n}{x - x_n} + \frac{B_n}{(x-x_n)^2} + \cdots$	$\frac{Ax+B}{x^2+px+q} \triangleq \frac{Ax+B}{(x-c)(x-\bar{c})} \triangleq \frac{Ax+B}{x^2 - 2ax + (a^2+b^2)}$

Regel von de l'Hôspital

Ausdruck $\frac{f(x)}{g(x)} = „\frac{0}{0}“$ oder $„\frac{\infty}{\infty}“$	$f(x)\,g(x) = „0\cdot\infty“$	$f(x)^{g(x)} = „1^{\infty}“; „0^0“$ oder $„\infty^0“$	$f(x) - g(x) = „\infty - \infty“$
$\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$	$\lim_{x\to c} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to x}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = „\frac{0}{0}“$	$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\ln(f(x))} = „e^{\infty\cdot 0}“$ oder $„e^{0\cdot\infty}“$	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,g(x)}} = „\frac{0}{0}“$

Erweitertes Horner-Schema:

$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

P_5 / x_0	a_3	a_2	a_1	a_0	
	/	$+x_0a_3$	$+x_0\Sigma_2$	$+x_0\Sigma_1$	
x_0	a_3	Σ_2	Σ_1	Σ_0	$\cdot 0! = P(x_0)$
	/	$+x_0a_3$	$+x_0\Sigma_2$		
x_0	a_3	Σ_2	Σ_1	$\cdot 1! = P'(x_0)$	
	/	$+x_0a_3$			
x_0	a_3	Σ_2	$\cdot 2! = P''(x_0)$		
	/				

Analytische Geometrie

Gerade:	$y = kx + d$ $ax + by = c$	P_1/k: $y - y_1 = k(x - x_1)$	P_1/ P: $y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$	$\varphi = \arctan\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$
Kreis	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$	Spaltgleichung: $x_0x + y_0y = r^2$; oder allgemein: $(x_0 - x_m)(x - x_m) + (y_0 - y_m)(y - y_m) = r^2$	
Parabel	$y = ax^2$	$(y - y_s) = a(x - x_s)^2$	Spaltgleichung $\frac{y_0 + y}{2} = ax_0x$	a>0: nach oben offen ay<0: nach unten offen
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} + \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$	Spaltgleichung $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$	
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_m)^2}{a^2} - \frac{(y - y_m)^2}{b^2} = 1$	Spaltgleichung $\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1$	

Sonstiges

Binomialkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ | $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ | $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ | $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ | $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Lagrange-Polynom: $Geg.: \{(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)\};\ \varphi_i(x) = \prod_{j=1;j\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)};\ p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i\,\varphi_i(x)$

Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | Negation: $\neg(\forall x\in M{:}\,A(x)) \Leftrightarrow (\exists x\in M{:}\,\neg A(x))$ | $\neg(\exists x\in M{:}\,A(x)) \Leftrightarrow (\forall x\in M{:}\,\neg A(x))$

Injektiv: $\forall a_1,a_2\in A{:}\ a_1\neq a_2{:}\ f(a_1)\neq f(a_2)$ | Surjektiv: $\forall b\in B{:}\ \exists a\in A{:}\ b = f(a)$ | bijektiv = injektiv ∧ surjektiv

Dreiecksungleichungen: $|x \pm y| \le |x| + |y|;\ \ |x \pm y| \ge \big||x| - |y|\big|;\ \ |xy| \le |x||y|$ | Komposition: $g\circ f = g(f(a))$

Gerade Funktion: $f(x) = f(-x)$ | Ungerade Funktion: $f(x) = -f(-x)$ | $f_G(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2};\ f_U(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

Konvex: $f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \le (1-\lambda)\,f(x_1) + \lambda\,f(x_2);\ \lambda\in(0{,}1)$ | Konkav: $f\big((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\big) \ge (1-\lambda)\,f(x_1) + \lambda\,f(x_2);\ \lambda\in(0{,}1)$

Stetig an c: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)\ \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0{:}\,\exists\,\delta(\varepsilon) > 0{:}\,\forall x{:}\,|c - x| < \delta{:}\ |f(c) - f(x)| < \varepsilon$ | Hebbar unstetig: $\lim_{x\to c_-} f(x) = \lim_{x\to c_+} f(x)$

Gleichmäßig stetig: $\forall\varepsilon > 0{:}\,\exists\,\delta(\varepsilon) > 0{:}\,\forall x_1,x_2{:}\,|x_1 - x_2| < \delta{:}\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Lipschitz-stetig: $\forall x_1,x_2\in I{:}\ |f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ | Lipschitz-stetig $\Longrightarrow$ gleichmäßig stetig: $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L$

Eine auf einem kompakten Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt.