Elektrodynamik I

14.3.2019

SRT und Lorentz-Transformation

Beta und Gamma	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $\beta = \frac{v}{c}$	In d Raumdimensionen bzw. D Raumzeitdimensionen gibt es d Boosts und $\frac{d(d+1)}{2} = \frac{D(D-1)}{2}$ Rotationen. Rotationen gehören zur Gruppe $SO(d)$. Postulate: Konstanz von c, kein bevorzugtes IS.

Lorentz-transfor-mation:	Sei S' das „bewegte" System, und S das „ruhende" System; d.h. die Geschwindigkeit und die Richtung von S' gegenüber S bestimmen die Größe und das Vorzeichen von β.	**Aktive LT:** Wie sieht „bewegtes" S' im „ruhenden" S aus? $\boldsymbol{a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a'^\nu}$	**Passive LT:** Wie sieht „ruhendes" S im „bewegten" S' aus? $\boldsymbol{a'^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu}$

Aktive LT Boost in x, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in y, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in z, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	Eigenschaften: $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$; $\det(\Lambda) = +1$
Passive LT Boost in x, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in y, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in z, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	$\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$; $\mathcal{L}_+^\uparrow \in SO(3,1)^\uparrow$ Lorentzgruppe orthochron

Drehung:	**Aktive Drehung**: Objekt wird in festem Koordinatensystem gedreht.	**Passive Drehung**: Das Koordinatensystem wird gedreht.

Aktive Drehung um x:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um y:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um z:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Passive Drehung um x:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um y:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um z:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Rapidität:	$\xi = \operatorname{artanh}(\beta) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E+c\lvert\vec p\rvert}{E-c\lvert\vec p\rvert}\right)$	$\beta = \tanh(\xi)$	$\gamma = \cosh(\xi)$	$\beta\gamma = \sinh(\xi)$	$\xi_{ges} = \xi_1 + \xi_2$	$v_{ges} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$

Einfache LT's à la GDPH 1	Ort:	$x = \gamma(x' + vt')$ $x' = \gamma(x - vt)$; $y = y'$ $y' = y$; $z = z'$ $z' = z$		Geschw.	$v_x = \frac{v_x'+v}{1+v_x'\frac{v}{c^2}}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1+v_x'\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_z = \frac{v_z'}{\gamma\left(1+v_x'\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_x' = \frac{v_x-v}{1-v_x\frac{v}{c^2}}$; $v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1-v_x\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_z' = \frac{v_z}{\gamma\left(1-v_x\frac{v}{c^2}\right)}$	
Zeitpunkt:	$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$; $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$		Dauer: $\tau = \gamma\tau_0$; Masse: $m = \gamma m_0$	Länge: $l = \frac{l_0}{\gamma}$	Frequenz $f_B = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$; $f_R = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$; $f_{traversal} = \frac{f_0}{\gamma}$	
Invariante:	$ds^2 = \eta_{ij}\,dx^i\,dx^j = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; $ds^2 > 0$: zeitartig, Kausalität; $ds^2 < 0$: raumartig; $ds^2 = 0$: lichtartig.					
Energie:	$E = E_0 + E_{kin} = m_0c^2 + mc^2 - m_0c^2 = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$; $E_{kin} = E - E_0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$					
	$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = E_0^2$ ... *invariant*					

4er Formalismus mit Minkowski-Metrik

4er-Vektor kontra variant	$a^\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec a \end{pmatrix}$	4er-Gradient	$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \vec\nabla \end{pmatrix}$	Quabla:	$\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec\Delta$	Minkowski-metrik (karth. Koord.):	$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$	4er-Vektoren u. Tensoren und ihre Skalarprodukte sind Lorentz-invariant.

Index unten ⇔ „kovariant", Index oben ⇔ „kontravariant". | Indexwechsel ko/kontra in Metrik(+,-,-,-) ⇒ Vorzeichenwechsel bei a_1, a_2, a_3

Rechen-regeln	$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\sigma} = \eta^\mu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma$	$a_\mu = \eta_{\mu\nu}a^\nu$	$a^\mu = \eta^{\mu\nu}a_\nu$	$A^{\mu\nu} = A^\mu{}_\beta\eta^{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu}$	$A_{\mu\nu} = A_\mu{}^\beta\eta_{\beta\nu} = \eta_{\mu\alpha}A^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu}$
	$A^{\mu\nu}_{\downarrow}B^{\mu\uparrow}_{\ \ \nu} = A^\mu{}_\beta\eta^{\beta\nu}B^\mu{}_\nu = A^\mu{}_\beta B^{\mu\beta} = A^\mu{}_\nu B^{\mu\nu}$	$(\eta_{\mu\nu})^{-1} = \eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = (\eta^{\mu\nu})^{-1}$	$\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$	$\partial^\mu x_\nu = \delta^\mu_\nu$	$\partial^\mu x^\nu = \eta^{\mu\nu}$; $\partial_\mu x_\nu = \eta_{\mu\nu}$
	$(A^{\mu\nu})^T = A^{\nu\mu}$	$(\Lambda^\mu{}_\nu)^T = A_\nu{}^\mu$	$(A^{\mu\nu})^{-1} = A_{\mu\nu}$	$A_{\mu\beta}B^\beta{}_\nu = A_\mu{}^\beta B_{\beta\nu} \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})_{\mu\nu}$	$A_{\beta\nu}B_\mu{}^\beta = A^\beta{}_\nu B_{\mu\beta} = B_{\mu\beta}A^\beta{}_\nu = B_\mu{}^\beta A_{\beta\nu} \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})_{\mu\nu}$
	$A^\beta{}_\mu B_{\beta\nu} = A_{\beta\mu}B^\beta{}_\nu = (A^T)_\mu{}^\beta B_{\beta\nu} = (A^T)_{\mu\beta}B^\beta{}_\nu \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{B}})_{\mu\nu}$			$A_{\mu\beta}B_\nu{}^\beta = A_\mu{}^\beta B_{\nu\beta} = A_{\mu\beta}(B^T)^\beta{}_\nu = A_\mu{}^\beta(B^T)_{\beta\mu} \mathrel{\hat=} (\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^T)_{\mu\nu}$	

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3,1}$: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = \boldsymbol{a}^T\eta\,\boldsymbol{b} = a^\mu\eta_{\mu\nu}b^\nu = a_\mu b^\mu$

Jeder Tensor 2. Stufe kann in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden: $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$

4er-Ortsvektor (kontravariant)	$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec x \end{pmatrix}$	Eigenzeit τ in S'	$ds^2 = ds'^2 \Rightarrow c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\vec v^2}{c^2}\right)dt^2 \Rightarrow \boxed{d\tau = \frac{1}{\gamma}dt}$
4er-Geschw. (kontravariant)	$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec v \end{pmatrix}$	$u^\mu u_\mu = \gamma^2(c^2 - \vec v^2) = c^2 > 0$ ⇒zeitartig	$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\frac{\vec a\cdot\vec v}{c^2}$
4er-Beschleu-nigung (kontravariant)	$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec v \end{pmatrix} = \gamma\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec v \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt}\vec v + \gamma\vec a \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c\,\gamma^3\frac{\vec a\cdot\vec v}{c^2} \\ \gamma^3\frac{\vec a\cdot\vec v}{c^2}\vec v + \gamma\vec a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{\vec a\cdot\vec v}{c} \\ \gamma^4\frac{\vec a\cdot\vec v}{c^2}\vec v + \gamma^2\vec a \end{pmatrix}$	Beschleuni-gung nur in x-Richtung:	$a^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{a_x v_x}{c} \\ \gamma^4 a_x \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 \\ a_x' \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu \Rightarrow a_x' = \gamma^3 a_x$ *	$a^\mu u_\mu = 0 \Rightarrow a^\mu \perp u^\mu$	$a^\mu a_\mu = -\vec{\tilde a}^2 < 0$ ⇒raumartig. ($\tilde a$...3er-Beschl. des IS, in dem $\vec v$=0)
4er-Impuls (kontravariant)	$p^\mu = m_0u^\mu = m_0\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0c + \frac{E_{kin}}{c} \\ \vec p \end{pmatrix}$	$p^\mu p_\mu = p_0^2 - \vec p^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - \vec p^2 = m_0^2c^2$ ... *invariant*	Masseteilchen: $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$; masselose Teil.: $E = \lvert\vec p\rvert c = hf$; $\vec p = \hbar\vec k = \frac{h}{\lambda}$
4er-Kraft (kontravariant)	$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} F^0 \\ \gamma\vec F \end{pmatrix} = m_0a^\mu$	$\vec F = m_0\gamma\vec a + m_0\gamma^3\frac{\vec v\cdot\vec a}{c}\vec v$ (für $m_0 = const.$) $\Rightarrow \vec F \nparallel \vec a$ (außer $\vec v \parallel \vec a \ \vee\ \vec v \perp \vec a$)	

Hyperbolische Bewegung bei konstanter Beschleunigung a_0 in S'

Geschwindigkeit aus Sicht von S	*) $a_x' \overset{!}{=} a_0 \Rightarrow a_0 = \gamma^3\, a_x(t) = \gamma^3 \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int a_0\, dt = \int \gamma^3 dv \Rightarrow a_0 t = \gamma v \Rightarrow v = a_0 t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}}$ AB: $x(0) \overset{!}{=} 0$
Beschleunigung aus Sicht von S	$a_0 = \gamma^3\, a_x(t) \Rightarrow a_x(t) = \left(1-\frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a_0 = \left(1-\frac{1}{c^2}\frac{a_0^2 t^2}{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}}\right)^{3/2} \Rightarrow \boxed{a_x(t) = \frac{a_0}{\left(1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}\right)^{3/2}}}$
Ortsvektor aus Sicht von S	$x(t) = \int v(t)\, dt = \frac{c^2}{a_0}\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}} + k \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{c^2}{a_0}\left(\sqrt{1+\frac{a_0^2 t^2}{c^2}} - 1\right)}$ AB: $x(0) \overset{!}{=} 0$

Maxwell

Feldstärketensor (kontravariant)	$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & B_y \\ +E_y & B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$	Feldstärketensor (kovariant)	$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\sigma} F^{\sigma\tau} \eta_{\tau\nu} = -F_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$
Hodge (dualer) Feldstärketensor (kontravariant) $\vec{E} \to \vec{B}; \vec{B} \to -\vec{E}$	$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ +B_x & 0 & E_z & -E_y \\ +B_y & -E_z & 0 & E_x \\ +B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$	Hodge (dualer) Feldstärketensor (kovariant) $\vec{E} \to \vec{B}; \vec{B} \to -\vec{E}$	$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F^{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & +B_x & +B_y & +B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{bmatrix}$

Lorentz-invar.:	$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -2\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)$	$F^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -4\vec{E}\cdot\vec{B}$	Elektr. Ant.:	$E^\mu = -\frac{1}{c} u_\nu F^{\mu\nu}$	Magn. Ant.:	$B^\nu = -\frac{1}{c} u_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$
Lorentz-Trafo	$F'^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\sigma F^{\sigma\tau} \tilde{\Lambda}^\nu{}_\tau = \left(\tilde{\Lambda} F \tilde{\Lambda}^T\right)^{\mu\nu}$	$E_x' = E_x;\ E_y' = \gamma(E_y - \beta B_z);\ E_z' = \gamma(E_z + \beta B_y);$ $B_x' = B_x;\ B_y' = \gamma(B_y + \beta E_z);\ B_z' = \gamma(B_z - \beta E_y);$				

4er-Maxwell Gleichungen

Annahmen:

- Lorentz-invariante Tensorgleichungen mit dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$
- Superpositionsprinzip: Lineare BWGL mit unterschiedlichen Lösungen je nach AB/RB ⇒ part. DGL 1. Ordnung
- Ansatz: $\underbrace{\partial_\mu F_{\alpha\beta}}_{Beschleunigungsterm} = \underbrace{Q_{\mu\alpha\beta}}_{Quellterm} + \underbrace{F^{\rho\sigma} Q_{\rho\sigma\mu\alpha\beta}}_{"Reibungsterm"}$
- Reibungsterm $F^{\rho\sigma} Q_{\rho\sigma\mu\alpha\beta} = 0$
- Quellen j^μ_{mag} und j^μ_{el} sind Viererströme.

⇒ verallgemeinerte Maxwell-Gleichungen:

- $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu_{el}$
- $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\mu_{mag}$; aber: keine magnetischen Monopole, daher: $j^\mu_{mag} \overset{!}{=} 0^\mu$ und $j^\nu_{el} = j^\nu$

⇒ tatsächliche Maxwell-Gleichungen in 4er-Schreibweise (kovariant):

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$ ... inhomogene Maxwellgleichung
$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0^\mu$ ... homogene Maxwellgleichung

4er-Stromdichte	$j^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}$	ρ...Ladungsdichte $\vec{j}$... el. Stromdichte	4er-E-Vektor	$E^\mu = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$	4er-B-Vektor	$B^\mu = -\frac{1}{2c} u_\nu \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$

Kontinuitätsgleichung

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Rightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \frac{4\pi}{c} j^\nu$ | NR: $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} \overset{\text{Satz von Schwarz}}{\widehat{=}} -\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} \overset{\mu\to\nu,\ \nu\to\mu}{\widehat{=}} -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$

$\frac{4\pi}{c} \partial_\nu j^\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\partial_\nu j^\nu = 0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + \partial_i j_i = \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$ ... „Ladung ist eine Erhaltungsgröße"

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \left|\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 4\pi \frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}\right.$ ... (1)

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \left| \vec{\nabla}\cdot \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\right) \Rightarrow 0 = \frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}\right.$

3er↔4er-Größen	$\vec{E} \sim E_i;\ \vec{B} \sim B_i;\ \vec{j} \sim j^i (!);\ E_i = F^{i0} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0;\ B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F_{jk};\ (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})_i = \partial_i E_i;\ (\vec{\nabla}\times\vec{E})_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j E_k$

3er-Maxwell Gleichungen cgs-Gauß-System			
	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$	Gauß: Die Raumladungen sind Quellen oder Senken des E-Feldes	inh. MWGL, $\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{4\pi}{c} j^0$
	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	Magn. Feldlinien geschlossen, es gibt keine magn. Monopole	hom. MWGL, 0-Komponente
	$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$	Induktionsg., Faraday, E-Feld hat bei $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ Wirbel (statisch: Stokes)	hom. MWGL, i-Komponente
	$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$	Amperesches Gesetz: B-Feld hat bei veränderl. E-Feld Wirbel	inh. MWGL, $\partial_\mu F^{\mu i} = \frac{4\pi}{c} j^i$

Lorenzkraft-dichte	$f^\mu_{(L)} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu$	in Komponenten	$f^0_{(L)} = \frac{1}{c}\vec{E}\vec{j};\ f^i_{(L)} = \rho E_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk} j^j B_k;\ \vec{f}_{(L)} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}$		
Energiedichte EM-Feld	$w_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$	Energiestromdichte EM-Feld (Poynting-V.)	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$	Poynting mittel	$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}^*\right)$
Kontinuitätsgl.	$\partial_t w_{mech} + \partial_t w_{em} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0 \Rightarrow \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{1}{8\pi}\partial_t\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) + \frac{c}{4\pi}\partial_t\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = 0$				
Energieerhaltung	$\frac{d}{dt} W^{mech} + \frac{d}{dt} W^{em} = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{S}\, dV \overset{Gauss}{\widehat{=}} -\oint_{\partial V} \vec{S}\cdot d\vec{f}$				

Streuung

Elastisch (dieselben Teilchen)	$\sum_A p_A^\mu = \sum_A p'^\mu_A$	2 elastisch im SPS:	$p^\mu_{SPS} = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix}; p^\mu_{SPS} p_\mu^{SPS} = M^2c^2; E_A = E'_A;\ E_B = E'_B$	2 elastisch im Lab.syst:	$p^\mu_{ges} p^A_\mu = p^\mu_{ges} p'^A_\mu$
Inelastisch (untersch. Teilchen)	$\sum_A p_A^\mu = \sum_{A'} p'^\mu_{A'}$	Zerfall $m_1 \to m_2, m_3$:	$p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu \overset{\text{Syst.1}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} m_1 c \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_2 c + \frac{E_2^{kin}}{c} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_3 c + \frac{E_3^{kin}}{c} \\ \vec{p}_3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_1 = m_2 + m_3 + \frac{E_2^{kin} + E_3^{kin}}{c^2}$		
E_2^{kin} bei Zerfall $m_1 \to m_2, m_3$:	$p_1^\mu = p_2^\mu + p_3^\mu \Rightarrow (p_3^\mu)^2 = (p_1^\mu - p_2^\mu)^2 = (p_1^\mu)^2 + (p_2^\mu)^2 - 2p_1^\mu p_\mu^2 \Rightarrow {m_3}^2c^2 = {m_1}^2c^2 + {m_2}^2c^2 - 2\begin{pmatrix} m_1 c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_2 c + \frac{E_2^{kin}}{c} \\ -\vec{p}_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow {m_3}^2c^2 = {m_1}^2c^2 + {m_2}^2c^2 - 2\left(m_1 m_2 c^2 + m_1 E_2^{kin}\right) \Rightarrow E_2^{kin} = c^2 \frac{(m_1 - m_2)^2 - {m_3}^2}{2m_1}$				

4er-Potential

4er-Potential A^μ	$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \Rightarrow$ löst die hom. Maxwell-Gl.	$A^\mu = \begin{pmatrix} \phi \\ A^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix};\ A_\mu = (\phi, A_i) = (\phi, -\vec{A})$
$E_i = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\frac{1}{c}\partial_t A_i - \partial_i \phi \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi$		$B_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} F_{jk} = -\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i \Leftrightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$
Antisymetrieren:	$A_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})F^{\mu\nu} = A_{\mu\nu}^{asym}F^{\mu\nu} + A_{\mu\nu}^{sym}F^{\mu\nu}$ NR: $A_{\mu\nu}^{sym}F^{\mu\nu} = -A_{\mu\nu}^{sym}F^{\nu\mu} = -A_{\nu\mu}^{sym}F^{\nu\mu} \overset{\mu\to\nu,\ \nu\to\mu}{\triangleq} -A_{\mu\nu}^{sym}F^{\mu\nu} \Rightarrow A_{\mu\nu}^{sym}F^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \boxed{A_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu})F^{\mu\nu} = A_{\mu\nu}^{asym}F^{\mu\nu}}$	
Lösen der hom. MWGL mit A_μ:	$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\beta A_\alpha = 0 \Rightarrow_{\alpha\to\beta,\ \beta\to\alpha}$ $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = 0 \Rightarrow \partial_\nu\partial_\alpha A_\beta(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} - \varepsilon^{\mu\nu\beta\alpha}) = 0 \Rightarrow \partial_\nu\partial_\alpha A_\beta(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}) = 0 \Rightarrow$ $2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = 0 \Rightarrow \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = 0$ ... stimmt immer, weil: $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = -\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta = -\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\nu A_\beta =_{\alpha\to\nu,\ \nu\to\alpha} = -\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu\partial_\alpha A_\beta$	
Lösen der hom. MWGL mit $\vec{A}$:	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$ ... stimmt immer, weil div(rot(A)) immer=0 ist. $\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}\right) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}\phi) = 0 \Rightarrow$ stimmt, weil rot(grad(ϕ))=0 $\Rightarrow$ $-\vec{\nabla}\phi = \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{A} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$	
Eichinvarianz:	$sei\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\ und\ F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu\ mit\ A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda\ (\Lambda\ reel, hinr. glatt: abelsche\ Eichsym) \Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}}$	
Lorenz-Eichung	$\partial_\mu A^\mu \overset{!}{=} 0 \Rightarrow inhom. MWGL: \partial_\mu\partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c}j^\nu \Leftrightarrow \Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j};\ \Box\phi = 4\pi\rho$; (EM-Wellen)	

Coulomb-Eichung	$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \overset{!}{=} 0$ (Dreier-Divergenz verschwindet) $\Rightarrow \vec{\Delta}\phi = -4\pi\rho; \Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{transv}$		Vektor-Poisson:	$\Delta A = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}$ (karth. einfacher)
	Für nat. RB: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert} dV'$; $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$		Biot Savart	$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')^3} dV'$
	Linienförmige Leiterschleife	$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\oint \frac{d\vec{r}'}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}$	linienförmig:	$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c}\oint\int \frac{d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{(\vec{r}-\vec{r}')^3}$

Elektrostatik

Elektrostatik:	$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \overset{!}{=} 0;\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \overset{!}{=} 0;\ \frac{\partial\rho}{\partial t} \overset{!}{=} 0;\ \frac{\partial\vec{j}}{\partial t} \overset{!}{=} 0$		Im Weiteren außerdem: $\vec{B} \overset{!}{=} 0; \vec{j} \overset{!}{=} 0$
Maxwellgleichungen in 3er Form (da keine zeitabhängigkeit) cgs-System	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$	Elektrostatik	Gauß: $\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = 4\pi Q = 4\pi\int\rho\, dV$ (Gesamtfluss durch Fläche proportional eingeschl. Ladung)
	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$		Stokes: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ (Statisches E-Feld ist wirbelfrei und konservatives Kraftfeld)
	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	Magnetostatik	Magn. Feldlinien geschlossen, es gibt keine magn. Monopole
	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$		rot($\vec{B}$) = lokale Stromdichte

Potential:	Vektorpotential $\vec{A} = 0 \Rightarrow$ skalares Potential ϕ ausreichend: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$	Spannung	$U = \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\, d\vec{r}'$
Poissongleichung:	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi(\vec{r})) = \boxed{-\Delta\phi(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})}$	Lösung des Laplace-Operators $-\vec{\Delta}/(4\pi)$ mittels Green'scher Funktion:	
	$\Delta\, \mathrm{G}(\vec{r},\vec{r}') \overset{\text{def}}{=} -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')\ mit\ \boxed{\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert} + \mathrm{G}_{hom}(\vec{r},\vec{r}')}\ ;\ \vec{\Delta}\,\mathrm{G}_{hom}(\vec{r},\vec{r}') \overset{\text{def}}{=} 0\ (RB) \Rightarrow \boxed{\phi(\vec{r}) = \int\rho(\vec{r}')\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r}')\, dV'}$		
	$\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ sphärisch: $\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^l + B_{lm}\frac{1}{r^{l+1}}\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$; bei Sym. um z: $\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right]P_l(\cos\vartheta)$		

Dirichlet RWP:	$\phi(\vec{r})\big\vert_{\vec{r}\in\partial V} \overset{!}{=}$ fix	Dirichlet Green-Fkt	$\phi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{G}_D(\vec{r},\vec{r}')\,\rho(\vec{r}')\, dV' - \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V=\vec{s}'}\phi(\vec{s}')\,[\vec{\nabla}'\mathrm{G}_D](\vec{r},\vec{s}')\cdot d\vec{A}'$ mit $\partial V = \vec{s}'(u,v)$; $\vec{n} = \frac{\partial\vec{s}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{s}}{\partial v}$ nach außen; $d\vec{A}' = \vec{n}(u,v)\, du\, dv$	Neumann RWP:	$\partial_n\phi(\vec{r}) = \frac{\phi(\vec{r})}{\partial\vec{n}}\Big\vert_{\vec{r}\in\partial V} \overset{!}{=}$ fix

Punktladungen und Spiegelladungen an geerdeten Flächen

Ladungsdichte. v. Punktladungen	$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$	Potential von Punktladungen:	$\phi(\vec{r}) = \int\rho(\vec{r}')\,\mathrm{G}(\vec{r},\vec{r}')\, dV' = \int\sum_i q_i\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_i)\frac{1}{\lvert\vec{r}-\vec{r}'\rvert}d^3r' = \sum_i\frac{q_i}{\lvert\vec{r}-\vec{r}_i\rvert}$		
Randbedingung für Fläche F:	$F = \{\vec{r}(u,v) : (u,v)\in B\}$ $\phi(\vec{r}(u,v)) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow q_i, \vec{r}_i;$	Feldstärke:	$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \sum_i q_i\frac{\vec{r}-r_i}{\lvert\vec{r}-r_i\rvert^3}$	Oberfl.-ldgsdichte	$\sigma(\vec{r}(u,v)) = \frac{1}{4\pi}\vec{E}(\vec{r}(u,v))\cdot\vec{n}(\vec{r}(u,v))$ $\vec{r}(u,v)$... geerdete Oberfläche; $\vec{n}$..."hinein"
Influenzierte Oberfl.ladung:	$Q = \int_{(u,v)\in B}\sigma(\vec{r}(u,v))\, dA\, ; dA = du\, dv = R^2\sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta = \sum q_{spiegel}$			Kraft auf Ladung q_0:	$\vec{F}(\vec{r}_0) = q_0\vec{E}_{Bild} = \sum_{i=1}^{n} q_i\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_i}{\lvert\vec{r}_0-r_i\rvert^3}$
Flächenspiegelung:	$d' = -d;\ q' = -q$	Kugelspiegelung:	$d' = \frac{R^2}{d}; q' = -q\frac{R}{d}$	Spiegelung Linienladung an Zylinder:	$d' = \frac{R^2}{d}; \tau' = -\tau$

Multipolentwicklung

Greensche Funktion karthesisch	$G(\vec r,\vec r')=\frac{1}{\lvert\vec r-\vec r'\rvert}=\frac{1}{r}+\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r^3}+\frac{3(\vec r\cdot\vec r')^2-r^2r'^2}{2r^5}+\cdots$	$3(\vec r\cdot\vec r')^2-r^2r'^2=$ $3(x_i'x_i)^2-r'^2x_ix_i=$ $3x_i'x_ix_j'x_j-r'^2\delta_{ij}x_ix_j$	$\Longrightarrow G(\vec r,\vec r')=\frac{1}{r}+\frac{\hat r\cdot\vec r'}{r^2}+\frac{\hat r_i\hat r_j(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})}{2r^3}+O\left(\frac{r'^3}{r^4}\right)$		
Potential:	$\phi(\vec r)=\int\rho(\vec r')\,G(\vec r,\vec r')\,dV'=\frac{q}{r}+\frac{\hat r\cdot\vec p}{r^2}+\frac{1}{2}\frac{\hat r_iQ_{ij}\hat r_j}{r^3}$	Dipol-mom.	$\vec p\overset{\text{def}}{=}\int\rho(\vec r')\,\vec r'\,dV'$	Quadrupol moment:	$Q_{ij}\overset{\text{def}}{=}\int\rho(\vec r')\,(3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})\,dV'$
Fernfeld:	$\vec E(\vec r)_{\lvert r\gg1}=\frac{q\vec r}{r^3}+\frac{3(\vec p\cdot\vec r)\vec r-\vec p r^2}{r^5}+O(r^{-4})$				
Sphärisch:	$G(\vec r,\vec r')=\frac{1}{\lvert\vec r-\vec r'\rvert}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\alpha)$; α… Winkel zw. $\vec r$ und $\vec r'$; $r_<\overset{\text{def}}{=}\min(r,r')$; $r_>\overset{\text{def}}{=}\max(r,r')$				
Potential:	$\phi(\vec r)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{q_{l,m}}{r^{l+1}}Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$	Sphärische Multipolmomente:	$q_{l,m}=\frac{4\pi}{2l+1}\int\rho(\vec r')(r')^l\,Y^*_{l,m}(\vartheta',\varphi')\,dV'$		
Ansatz Potential bei Zylindersymetrie:	$\phi(r,\varphi)=A_0+\sum_{m=1}^{\infty}[A_m\cos(m\varphi)+B_m\sin(m\varphi)]\left(\frac{r}{R}\right)^m$				
magnetisch	$\vec A(\vec r)=\frac{\vec m\times\vec r}{r^3}$	Magn. Dipolmoment:	$\vec m\overset{\text{def}}{=}\int\vec r\times\vec j(\vec r)\,dV$	$\vec B_{dipol}{}_{\lvert r\gg1}=\vec\nabla\times\vec A_{dipol}{}_{\lvert r\gg1}=\frac{3(\vec m\cdot\vec r)\vec r-\vec m r^2}{r^5}$	

Makroskopische Elektrostatik/Magnetostatik

Ein Teilchen j	$\phi_j(\vec r)\approx\frac{q_j}{\lvert\vec r-\vec r_j\rvert}+\vec p_j\vec\nabla_{(r_j)}\frac{1}{\lvert\vec r-\vec r_j\rvert}=\frac{q_j}{\lvert\vec r-\vec r_j\rvert}-\vec p_j\vec\nabla\frac{1}{\lvert\vec r-\vec r_j\rvert}$

Herleitung makroskopische Maxwellgleichungen:

$$\phi_{mol}(\vec r)=\int\left[\frac{\rho_{mol}(\vec r'')}{|\vec r-\vec r''|}-\vec\Pi_{mol}(\vec r'')\cdot\vec\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r''|}\right]dV''\ ;\ \rho_{mol}(\vec r)=\sum_j q_j\,\delta(\vec r-\vec r_j)\ ;\ \vec\pi_{mol}(\vec r)=\sum_j\vec p_j\,\delta(\vec r-\vec r_j)$$

$$\vec E_{mol}(\vec r)=-\vec\nabla\phi_{mol}(\vec r)$$
$$\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=\int f(\vec r')\,(-\vec\nabla)\,\phi_{mol}(\vec r+\vec r')\,dV'$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=\vec\nabla\cdot\int f(\vec r')\,(-\vec\nabla)\,\phi_{mol}(\vec r+\vec r')\,dV'$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=-\Delta\int f(\vec r')\,\phi_{mol}(\vec r+\vec r')\,dV'$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=-\Delta\int f(\vec r')\int\left[\frac{\rho_{mol}(\vec r'')}{|\vec r+\vec r'-\vec r''|}-\vec\pi_{mol}(\vec r'')\cdot\vec\nabla\frac{1}{|\vec r+\vec r'-\vec r''|}\right]dV''\,dV'$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=-\Delta\int f(\vec r')\int[\rho_{mol}(\vec r'')-\vec\pi_{mol}(\vec r'')\cdot\vec\nabla]\frac{1}{|\vec r+\vec r'-\vec r''|}dV''\,dV'\quad\Big|\ \Delta\ wirkt\ auf\ \vec r;\ -\Delta\frac{1}{|\vec r+\vec r'-\vec r''|}=4\pi\,\delta(\vec r+\vec r'-\vec r'')$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=\int f(\vec r')\int[\rho_{mol}(\vec r'')-\vec\pi_{mol}(\vec r'')\cdot\vec\nabla]\,4\pi\,\delta(\vec r+\vec r'-\vec r'')\,dV''\,dV'$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=4\pi\int f(\vec r')\,[\rho_{mol}(\vec r+\vec r')-\vec\pi_{mol}(\vec r+\vec r')\cdot\vec\nabla]\,dV'\quad\big|\ \vec\pi\cdot\vec\nabla=\vec\nabla\cdot\vec\pi$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=4\pi\int f(\vec r')\,[\rho_{mol}(\vec r+\vec r')-\vec\nabla\cdot\vec\pi_{mol}(\vec r+\vec r')]\,dV'$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=4\pi\int f(\vec r')\,\rho_{mol}(\vec r+\vec r')\,dV'-4\pi\int\vec\nabla\cdot f(\vec r')\,\vec\pi_{mol}(\vec r+\vec r')\,dV'$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=4\pi\langle\rho_{mol}(\vec r)\rangle-4\pi\langle\vec\nabla\cdot\vec\pi_{mol}(\vec r)\rangle$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=4\pi\big(\langle\rho_{mol}(\vec r)\rangle+\rho_{ext}-\vec\nabla\cdot\langle\vec\pi_{mol}(\vec r)\rangle\big)\quad\big|\ \rho_f\overset{\text{def}}{=}\langle\rho_{mol}(\vec r)\rangle+\rho_{ext}$$
$$\vec\nabla\cdot\langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle=4\pi\big(\rho_f-\vec\nabla\cdot\langle\vec\pi_{mol}(\vec r)\rangle\big)\quad\big|\ \langle\vec E_{mol}(\vec r)\rangle\to\vec E$$
$$\vec\nabla\cdot\vec E=4\pi\big(\rho_f-\vec\nabla\cdot\langle\vec\pi_{mol}(\vec r)\rangle\big)\quad\boxed{\vec P(\vec r)\overset{\text{def}}{=}\langle\vec\pi_{mol}(\vec r)\rangle}\ \text{(„Polarisation“)}$$
$$\vec\nabla\cdot\vec E=4\pi\big(\rho_f-\vec\nabla\cdot\vec P(\vec r)\big)\quad\boxed{\rho_p(\vec r)\overset{\text{def}}{=}-\vec\nabla\cdot\vec P(\vec r)}\ \text{(„Polarisationsladungsdichte“)}$$
$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec E=4\pi(\rho_f+\rho_p)=4\pi(\rho_f-\vec\nabla\cdot\vec P)}\quad\boxed{\vec D\overset{\text{def}}{=}\vec E+4\pi\vec P}\ \text{(„dielektrische Verschiebung“)}\Longrightarrow\vec E=\vec D-4\pi\vec P$$
$$\vec\nabla\cdot(\vec D-4\pi\vec P)=4\pi\rho_f-4\pi\,\vec\nabla\cdot\vec P$$
$$\vec\nabla\cdot\vec D-4\pi\,\vec\nabla\cdot\vec P=4\pi\rho_f-4\pi\,\vec\nabla\cdot\vec P$$
$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec D=4\pi\rho_f}$$

Maxwell	$\vec\nabla\cdot\vec D=4\pi\rho_f$	$\vec\nabla\times\vec E=0$	$\vec\nabla\cdot\vec B=0$	$\vec\nabla\times\vec H=\frac{4\pi}{c}\vec j_f$	Dielektr. Versch	$\vec D\overset{\text{def}}{=}\vec E+4\pi\vec P$	Mgn. Feldst.:	$\vec H\overset{\text{def}}{=}\vec B-4\pi\vec M$
	$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta}=0$ … homogen, unverändert	$\partial_\mu D^{\mu\nu}=\frac{4\pi}{c}j_f{}^\nu;\ D^{\mu\nu}\triangleq F^{\mu\nu}(\vec E\to\vec D,\vec B\to\vec H)$	Kont. Gl.	$\frac{\partial\rho_f}{\partial t}+\vec\nabla\cdot\vec j_f=0$				
Materialgl. D	$\vec D\overset{\text{def}}{=}\vec E+4\pi\vec P;P_i=\chi_{ij}E_j\ (+\xi_{ij}B_j);$ $\boxed{\vec P\approx\chi_e\vec E;\ \vec D=(1+4\pi\chi_e)\vec E=\varepsilon\vec E}$	χ_e… Suzeptibilität; ε… Dielektrizitätskonstante						
Materialgl. H	$\vec H\overset{\text{def}}{=}\vec B-4\pi\vec M;$ $\boxed{\vec M\approx\chi_m\vec H;\ \vec B=(1+4\pi\chi_m)\vec H=\mu\vec H}$	Ohm $\vec j_f=\sigma\vec E$	χ_m… mag. Suzeptibilität; μ… Permeabilitätskonstante					
MW-Satz:	Natürliche RB, mitteln über Kugel R, Kugelmittelp.=Ursprung	$f(r,\vartheta,\varphi))=\frac{3}{4\pi R^3}H(R-r)\Longrightarrow\langle\vec E(0)\rangle_R=\vec E^>(0)-\frac{1}{R^3}\vec p^<(0)$						
Reiner E-Dipo	$\langle\vec E(0)\rangle_{R\to0}=\vec E_{dipol}^{r\gg1}+\alpha\vec p\,\delta(\vec r)=0+\alpha\vec p\,\frac{3}{4\pi R^3}\overset{!}{=}-\frac{1}{R^3}\vec p\Longrightarrow\boxed{\vec E_{dipol}^{rein}=\frac{3(\vec p\cdot\vec r)\vec r-\vec r^2\vec p}{r^5}-\frac{4\pi}{3}\vec p\,\delta(\vec r)}$							
reiner M-Dipol	$\langle\vec B(0)\rangle_R=\vec B^>(0)+\frac{2}{R^3}\vec m^<(0)\Longrightarrow\langle\vec B(0)\rangle_{R\to0}=\vec B_{dipol}^{rein}=\frac{3(\vec m\cdot\vec r)\vec r-\vec r^2\vec m}{r^5}+\frac{8\pi}{3}\vec m\,\delta(\vec r)$							
Cl.-Mossotti:	$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi}{3}N\chi_{mol}$	Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Dichte N bzw. molekularer Polarisierbarkeit χ_{mol}						
Elektrostat. Energie:	$W_E=\frac{1}{8\pi}\int\vec E\cdot\vec D\,dV=\frac{\varepsilon}{8\pi}\int\vec E^2\,dV>W_{vac}$	Magnetostat. Energie:	$W_M=\frac{1}{8\pi}\int\vec B\cdot\vec H\,dV=\frac{1}{2c}\int\vec A\cdot j\,dV$	Energ Dichte	$w_{em}=\frac{1}{8\pi}(\vec E\cdot\vec D+\vec B\cdot\vec H)$			
Poynting-Vkt	$\vec S=\frac{c}{4\pi}(\vec E\times\vec H)=\frac{c}{4\pi}\lvert\vec E\rvert\lvert\vec H\rvert\hat k=\frac{c_{eff}}{8\pi}(\vec E\vec D+\vec B\vec H)=c_{eff}w_{em}\hat k$	Imp.Dichte	$\vec g_{em}=\frac{1}{4\pi c}(\vec D\times\vec B)=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\vec S$	Eff. LG	$c_{eff}^2=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}$			

Anschlussbedingungen

E-Feld:	Schleife um Grenzfläche mit Höhe Δh und Länge Δs: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \,\vert\, \Delta h, \Delta s \to 0$ $\boxed{\hat{e}_t\cdot(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \Leftrightarrow \hat{e}_n\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)}$ Gilt auch im dynamischen Fall. Zwar ist dann $\oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}$, aber die Fläche der Schleife ist Null, dh. $\oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = 0$. Tangentialkomponente immer stetig.
D-Feld:	Dose mit Höhe Δh hüllt die Grenzflächen ein. Gauß: $4\pi\int \rho_f\, dV = \oint \vec{D}\cdot d\vec{A} \,\vert\, \Delta h \to 0$ $\boxed{\hat{e}_n\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=4\pi\sigma_f}$ ($\hat{e}_n$ von 1 nach 2) Normalkomponente nur stetig, wenn freie Flächenladungsdichte $\sigma_f = 0$.
B-Feld:	Dose mit Höhe Δh hüllt die Grenzflächen ein. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0 \,\vert\, \Delta h \to 0$ $\boxed{\hat{e}_n\cdot(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0}$. Normalkomp. Immer stetig.
H-Feld:	Schleife um Grenzfläche: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{r} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}_f\cdot d\vec{A} \,\vert\, \Delta h, \Delta s \to 0$ $\hat{e}_t\cdot(\vec{H}_2-\vec{H}_1) = \frac{4\pi}{c}(\hat{e}_n\times\hat{e}_t)\cdot\vec{k}_f \Leftrightarrow$ $\boxed{\hat{e}_n\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\frac{4\pi}{c}\cdot\vec{k}_f}$ Tangentialkomponente nur stetig, wenn Flächenstromdichte $\vec{k}_f = 0$.
Polarisation:	$\boxed{-\hat{e}_n\cdot(\vec{P}_2-\vec{P}_1)=\sigma_p}$ Magneti-sierung: $\boxed{c\,\hat{e}_n\times(\vec{M}_2-\vec{M}_1)=k_m}$ Feldlinienver-lauf D-Feld: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\varepsilon_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\varepsilon_2}$ Feldlinienver-lauf H-Feld: $\frac{\tan(\alpha_1)}{\mu_1} = \frac{\tan(\alpha_2)}{\mu_2}$

Potential, Poissongleichung im (linearen) Dielektrikum

Poisson-gleichung:	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Longrightarrow \exists\phi: \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varepsilon\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho_f \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot(-\vec{\nabla}\phi) =$ $\boxed{-\Delta\,\phi(\vec{r}) = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(\vec{r})}$ $\boxed{G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{\vert\vec{r}-\vec{r}'\vert} + G_{hom}(\vec{r},\vec{r}')}$; $\Delta\, G_{hom}(\vec{r},\vec{r}') \stackrel{\text{def}}{=} 0$ $(fixiert\ RB) \Rightarrow$ $\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon}\int \rho_f(\vec{r}')\, G(\vec{r},\vec{r}')\, dV'}$

Wellengleichung

Wellengleich. Für E-Feld in Vakuum (j=0, ρ=0)	Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \,\vert\, \vec{\nabla}\times \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$ $\Big\vert \left(\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\vec{j}}_{=0} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ (Maxwell) $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})}_{=\rho/\varepsilon_0=0} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$ $\boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$ $\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = \left(\frac{1}{c^2}\partial t^2 - \Delta\right)\vec{E} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\Box\,\vec{E}(t,\vec{r}) = 0}$
Wellengleich. Für B-Feld in Vakuum (j=0, ρ=0)	Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\underbrace{\vec{j}}_{=0} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \,\vert\, \vec{\nabla}\times \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{\nabla}\times\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{E}$ $\Big\vert \left(\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$ (Maxwell) $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{=0} - \Delta\vec{B} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow$ $\boxed{\Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}}$ $\Rightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} - \Delta\vec{B} = \left(\frac{1}{c^2}\partial t^2 - \Delta\right)\vec{B} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\Box\,\vec{B}(t,\vec{r}) = 0}$
Ebene mono-chromati-sche Welle (E-Feld)	$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \,\Big\vert\, \vec{E} \stackrel{!}{=} \vec{E}_0\, R(\vec{r})\, T(t) \Rightarrow \Delta\left(\vec{E}_0\, R(\vec{r})\, T(t)\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\vec{E}_0\, R(\vec{r})\, T(t)\right) \Rightarrow \vec{E}_0\, T(t)\,\Delta R(\vec{r}) = \frac{1}{c^2}\vec{E}_0\, R(\vec{r})\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) \,\Big\vert\cdot \frac{1}{\vec{E}_0\, R(\vec{r})\, T(t)}$ $\frac{\Delta R(\vec{r})}{R(\vec{r})} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial_t^2 T(t)}{T(t)} \stackrel{!}{=} -k^2 \Rightarrow \ddot{T} = -k^2c^2T \Rightarrow \lambda^2 = -k^2c^2 \Rightarrow \lambda = \pm ikc; wähle\ \lambda = -ikc = -i\omega \Rightarrow$ $\boxed{T(t) = e^{-i\omega t}}$ $\frac{\Delta R}{R} = -k^2 \Rightarrow \Delta R = -k^2R \Rightarrow \lambda^2 = -\vec{k}^2 \Rightarrow \lambda = \pm ik; wähle\ \lambda = i\vec{k} \Rightarrow$ $\boxed{R(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}$ $\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{-i\omega t} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}}$
Ebene mono-chromati-sche Welle (B-Feld aus E-Feld)	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -c\begin{pmatrix}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}E_z^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \frac{\partial}{\partial z}E_y^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ \frac{\partial}{\partial z}E_x^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \frac{\partial}{\partial x}E_0^z e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ \frac{\partial}{\partial x}E_y^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \frac{\partial}{\partial y}E_x^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\end{pmatrix} = -c\begin{pmatrix}ik_yE_z^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - ik_zE_y^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ ik_zE_x^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - ik_xE_0^z e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\\ ik_xE_y^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - ik_yE_x^0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\end{pmatrix}$ $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -ci\begin{pmatrix}k_yE_z^0 - k_zE_y^0\\ k_zE_x^0 - k_xE_0^z\\ k_xE_y^0 - k_yE_x^0\end{pmatrix}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = -ci(\vec{k}\times\vec{E}_0)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow \vec{B} = -ci(\vec{k}\times\vec{E}_0)\int e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\,dt = -ci(\vec{k}\times\vec{E}_0)\frac{1}{-i\omega}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ $\vec{B} = c\frac{1}{kc}(\vec{k}\times\vec{E}_0)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \hat{k}\times\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)};\ \vec{B}_0 = \hat{k}\times\vec{E}_0;\ \lvert\vec{B}_0\rvert = \lvert\vec{E}_0\rvert}$, außerdem: $\boxed{\vec{E}_0 = -\hat{k}\times\vec{B}_0}$
Eigensch.:	$\lvert\vec{B}_0\rvert = \lvert\vec{E}_0\rvert; selbe\ Phase, \omega = kc;\ \vec{E}_0\cdot\vec{k} = 0;\ \vec{B}_0\cdot\vec{k} = 0;\ \vec{k}, \vec{E}_0, \vec{B}_0 bilden\ orthogonales\ Dreibein.$
Polarisation	Linear polarisiert: $\vec{E}_0 \in \mathbb{R}^3$ elliptisch: $\vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3 \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0^1\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t) + \vec{E}_0^2\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$ zirkular: $\lvert\vec{E}_0^1\rvert = \lvert\vec{E}_0^2\rvert$
Allgemeine Lösung der Wellen-gleichung	Superpos., eine Ausbr.richtg $\hat{k}$: $\vec{E}(t,\vec{r}) = \int \vec{E}_0(k)\, e^{-ik(\hat{k}\cdot\vec{r}-ct)}\, dk$ plus Gegenrichtg $\vec{E}(t,\vec{r}) = \vec{E}_1(\hat{k}\cdot\vec{r}-ct) + \vec{E}_2(\hat{k}\cdot\vec{r}+ct)$ Alle Raumrichtungen: $\vec{E}(t,\vec{r}) = \int \vec{E}(k)\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\lvert k\rvert ct)}\, d^3k$ Viererschreibweise: $E_\nu(x^\alpha) = \int E_\nu^0(k_\alpha)\, e^{-ik_\mu x^\mu}\,\delta(k^\mu k_\mu)\, d^4k$ Kugelwellen: $\Box\Psi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Psi = 0 \Longrightarrow \Psi(t,\vec{r}) = \frac{e^{i(\pm kr-\omega t)}}{r} \propto \frac{1}{r}$

Wellenausbreitung in homogenen, linearen Medien

Annahmen	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}; \vec{B} = \mu\vec{H};\ \rho = 0; \vec{j} = \sigma\vec{E}$	Maxwell:	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Telegraphen-Gleichung E-Feld	Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\ \vert \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{H})\ \Big\vert\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=0} - \Delta\vec{E} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\ \Big\vert\ c_{eff} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \Longrightarrow c^2 = c_{eff}^2\varepsilon\mu$ $\Delta\vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c_{eff}^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c_{eff}^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta\vec{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{1}{c_{eff}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\Box_{eff}\vec{E} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}}$					
Telegraphen-Gleichung H-Feld	Maxwell: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\ \vert \vec{\nabla} \times \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{E})\ \Big\vert\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{H})}_{=0} - \Delta\vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}\ \Big\vert\ c_{eff} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \Longrightarrow c^2 = c_{eff}^2\varepsilon\mu$ $\Delta\vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{c_{eff}^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c_{eff}^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \Delta\vec{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{1}{c_{eff}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\Box_{eff}\vec{H} = -\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$					
Isolator:	$\sigma = 0 \Rightarrow \Box_{eff}\vec{E} = 0;\ \Box_{eff}\vec{H} = 0; \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)};\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}; \sqrt{\varepsilon}\lvert\vec{E}\rvert = \sqrt{\mu}\lvert H\rvert$	Displ.rel.:	$\omega = kc_{eff} = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$			
Leiter:	$\sigma \neq 0 \Rightarrow -\frac{\omega^2}{c_{eff}^2} + \vec{k}^2 = \frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2} \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} + \frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2} \Rightarrow \boxed{\vec{k}^2 = \eta\mu\frac{\omega^2}{c^2};\ \eta = \varepsilon\left(1 + \frac{4\pi i\sigma}{\varepsilon\omega}\right)}\ \sqrt{v}\lvert\vec{E}\rvert = \sqrt{\mu}\lvert H\rvert$					
Eindringtiefe	Sei $\omega \in \mathbb{R}$ und $\vec{k} = \hat{x}(k_{re} + ik_{im}) \Rightarrow \vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i(k_{re}\cdot x - \omega t)}\ \underbrace{e^{-k_{im}x}}_{Dämpfung}$; Eindringtiefe $\boxed{d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{k_{im}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}}$					
Ph.-geschw.	$c_{ph} = c_{eff} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	Gruppengeschwindigkeit:	$c_{gr}(k_0) = \frac{\partial\omega}{\partial k}\Big\vert_{k=k_0}$	Frontgeschwindigkeit	$c_{front} = \lim_{k\to\infty}\frac{\omega(k)}{k}$	

Cauchy'scher Residuensatz:

Sei C eine stückweise glatte, geschlossene Kurve, und f sei auf C und in ihrem inneren analytisch, mit Ausnahme end-lich vieler isolierter Singularitäten $z_0 \ldots z_n$ im Inneren von C:	$\oint_C f(\underline{z})\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(\underline{z})$	$\operatorname{Res}_{z=z_n} f(\underline{z})$ ist der Koeff-izient c_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f um z_0:	$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(\underline{z}) = c_{-1}$	
Residuum bei Pol 1. Ordnung:	$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(\underline{z}) = \lim_{z\to z_0}(\underline{z} - \underline{z}_0)\,f(\underline{z})$	Residuum bei Pol m. Ordnung:	$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(\underline{z}) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((\underline{z} - \underline{z}_0)^m f(\underline{z})\right)$	

Fouriertransformation:

Fourier-Transfor-mierte	$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}\,dx \begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{cases}$	Rück-trafo	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\,e^{ikx}\,dk$	Wenn f in x nicht stetig:	$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\,e^{ikx}\,dk$		
Linearität:	$(\widehat{af + bg}) = a\hat{f} + b\hat{g}$	Fourier-Transf. d. 1. Ableitung:	$\widehat{f'}(k) = ik\,\hat{f}(k)$	2. Ab-leitung	$\widehat{f''}(k) = -k^2\,\hat{f}(k)$	n-te Ab-leitung:	$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n\,\hat{f}(k)$
Ableitung d. Fourier-Trans.	$(\hat{f}(k))' = (\widehat{-ix\,f(x)})(k)$	Fourier-Transf. einer Faltung:	$(\widehat{f * g})(k) = \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$	Fourier-Transf. der part. 2. Abl.:	$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2\,\hat{u}(k, y)}{\partial y^2}$		
$\hat{f}$ beschränkt:	Wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}\,dx$ existiert (Voraussetzung für Fouriertransformation), dann: $\lvert\hat{f}(k)\rvert \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert\,dx$						
Dimension D	Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^D}$						

Retardierte Green-Funktion

$\Box\, \mathrm{G}(\vec r,\vec r',t,t') = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')\,\Big|\,\Box \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)$

$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\mathrm{G}(\vec r,\vec r',t,t') = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')$

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{G}(\vec r,\vec r',t,t') - \Delta\,\mathrm{G}(\vec r,\vec r',t,t') = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')\,\Big|\,\mathrm{G}(\vec r,\vec r',t,t') \overset{Fourier}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4}\int \widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{ik(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega\,d^3k$

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^4}\int \widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{ik(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega\,d^3k - \Delta\frac{1}{\sqrt{2\pi}^4}\int \widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{ik(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega\,d^3k = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')$

$\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi^2}\int \widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega\,d^3k - \frac{1}{4\pi^2}\int \widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,\Delta e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega\,d^3k = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')$

$\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi^2}\int \widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}(-\omega^2)e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega\,d^3k - \frac{1}{4\pi^2}\int \widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)(-k^2)e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\,d\omega\,d^3k = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')$

$\frac{1}{4\pi^2}\left[-\int\frac{\omega^2}{c^2}\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}d\omega\,d^3k + \int k^2\,\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}d\omega\,d^3k\right] = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')$

$\frac{1}{4\pi^2}\left[\int\left(k^2\,\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')} - \frac{\omega^2}{c^2}\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)e^{ik(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\right)d\omega\,d^3k\right] = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')$

$\int\frac{1}{4\pi^2}\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)d\omega\,d^3k = 4\pi\,\delta(t-t')\,\delta^{(3)}(\vec r-\vec r')\,\Big|\,\delta(t-t') \overset{Four}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\omega;\ \delta^{(3)}(\vec r-\vec r') \overset{Four}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}d^3k$

$\int\frac{1}{4\pi^2}\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)d\omega\,d^3k = 4\pi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\omega\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}d^3k$

$\int\frac{1}{4\pi^2}\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)d\omega\,d^3k = \int\frac{4\pi}{16\pi^4}e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}d\omega d^3k\,\Big|\,Integranden\ gleichsetzen$

$\frac{1}{4\pi^2}\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\,e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right) = \frac{1}{4\pi^3}e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}$

$\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\pi}$

$\widehat{\mathrm{G}}(\vec k,\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)} = \frac{c^2}{\pi}\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}$ … (1) Zwischenergebnis (fouriertransformierte Green-Funktion)

$\mathrm{G}(\vec r,\vec r',t,t') = \frac{c^2}{4\pi^3}\int\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}e^{i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}e^{-i\omega(t-t')}d\omega\,d^3k\,\Big|\,\vec R \overset{\text{def}}{=} \vec r-\vec r';\ \tau \overset{\text{def}}{=} t-t'$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{4\pi^3}\int\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}e^{i\vec k\cdot\vec R}e^{-i\omega\tau}d\omega\,d^3k\,\Big|\,w\ddot{a}hle\ z-Achse\ Richtung\ \vec R \Longrightarrow \vec R = \hat e_z R$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{4\pi^3}\int\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}e^{i\vec k\cdot\hat e_z R}e^{-i\omega\tau}d\omega\,d^3k\,\Big|\,\vec k\cdot\hat e_z = k\cos\vartheta$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{4\pi^3}\int\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}e^{ikR\cos\vartheta}e^{-i\omega\tau}d\omega\,d^3k\,\Big|\,d^3k\ mit\ Kugelkoordinaten\ k,\vartheta,\varphi\ (weil\ k = |\vec k| = \sqrt{k_x+k_y+k_z} = Radius)$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{4\pi^3}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}e^{ikR\cos\vartheta}e^{-i\omega\tau}\,d\omega\,k^2\sin\vartheta\,dk\,d\varphi\,d\vartheta\,\big|\,u = \cos\vartheta;\,du = -\sin\vartheta;\,u_- = \cos 0 = 1;\,u^+ = \cos\pi = -1$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = -\frac{c^2}{4\pi^3}\int_{u=1}^{-1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}e^{ikRu}e^{-i\omega\tau}\,d\omega\,k^2dk\,d\varphi\,du$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = +\frac{c^2}{4\pi^3}\int_{u=-1}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}e^{ikRu}e^{-i\omega\tau}\,d\omega\,k^2dk\,d\varphi\,du$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{4\pi^3}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}\left[\frac{1}{ikR}e^{ikRu}\right]_{u=-1}^{1}e^{-i\omega\tau}\,d\omega\,k^2dk\,d\varphi$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{4\pi^3 iR}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}(e^{ikR}-e^{-ikR})e^{-i\omega\tau}\,d\omega\,\frac{1}{k}k^2dR\,d\varphi\,\Big|\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{2\pi^2 ik}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}\frac{1}{c^2k^2-\omega^2}(e^{ikR}-e^{-ikR})e^{-i\omega\tau}\,d\omega\,kdk$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c^2}{2\pi^2 ik}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\omega=-\infty}^{\infty}k(e^{ikR}-e^{-ikR})\frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2k^2-\omega^2}dk\,d\omega$ … (2)

… ω-Integral mit Residuensatz, Integration um den unteren Halbkreis, Pole $\pm kc$ oben umgehen…

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2k^2-\omega^2}d\omega = -2i\pi\left((\omega+kc)\frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2k^2-\omega^2}\Big|_{\omega\to-kc} + (\omega-kc)\frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2k^2-\omega^2}\Big|_{\omega\to kc}\right)$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2k^2-\omega^2}d\omega = -2i\pi\left((\omega+kc)\frac{e^{-i\omega\tau}}{(kc+\omega)(kc-\omega)}\Big|_{\omega\to-kc} + (\omega-kc)\frac{e^{-i\omega\tau}}{(kc+\omega)(kc-\omega)}\Big|_{\omega\to kc}\right)$

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega\tau}}{c^2k^2-\omega^2}d\omega = -2i\pi\left(\frac{e^{-i\omega\tau}}{kc-\omega}\Big|_{\omega\to-kc} - \frac{e^{-i\omega\tau}}{kc+\omega}\Big|_{\omega\to kc}\right) = -2i\pi\left(\frac{e^{ikc\tau}}{2kc}-\frac{e^{-ikc\tau}}{2kc}\right) = \frac{i\pi}{kc}(e^{-ikc\tau}-e^{ikc\tau}) \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}(e^{ikR}-e^{-ikR})(e^{-ikc\tau}-e^{ikc\tau})\,dk$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}(e^{ikR}e^{-ikc\tau}-e^{ikR}e^{ikc\tau}-e^{-ikR}e^{-ikc\tau}+e^{-ikR}e^{ikc\tau})\,dk$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{ik(R+c\tau)}-e^{ik(-R-c\tau)}+e^{ik(-R+c\tau)}\right)dk$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{ik(R+c\tau)}-e^{-ik(R+c\tau)}+e^{-ik(R-c\tau)}\right)dk$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{-ik(R+c\tau)}\right)dk - \underbrace{\frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(R+c\tau)}-e^{-ik(R-c\tau)}\right)dk}_{k=-u;dk=-du;u^+=-k^+=-\infty;u_-=0}$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{-ik(R+c\tau)}\right)dk + \frac{c}{2\pi R}\int_0^{-\infty}\left(e^{-iu(R+c\tau)}-e^{iu(R-c\tau)}\right)du\,\Big|\,-\int_0^{-\infty}(a-b)\,du = +\int_{-\infty}^{0}(a-b)\,du = -\int_{-\infty}^{0}(b-a)\,du$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{-ik(R+c\tau)}\right)dk + \frac{c}{2\pi R}\int_{-\infty}^{0}\left(e^{iu(R-c\tau)}-e^{-iu(R+c\tau)}\right)du\,\Big|\,u\to k$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_0^{\infty}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{-ik(R+c\tau)}\right)dk + \frac{c}{2\pi R}\int_{-\infty}^{0}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{-ik(R+c\tau)}\right)dk$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ik(R-c\tau)}-e^{-ik(R+c\tau)}\right)dk\,\Big|\,k = \frac{K}{c};\ \frac{dk}{dK} = \frac{1}{c} \Longrightarrow dk = \frac{1}{c}dK$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{c}{2\pi R}\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\frac{K}{c}(R-c\tau)}-e^{-i\frac{K}{c}(R+c\tau)}\right)dK = \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iK\left(\frac{R}{c}-\tau\right)}-e^{iK\left(-\frac{R}{c}-\tau\right)}\right)dK\,\Big|\left(\frac{R}{c}-\tau\right) \overset{\text{def}}{=} x_1;\ \left(-\frac{R}{c}-\tau\right) \overset{\text{def}}{=} x_2$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iKx_1}\,dK - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iKx_2}\,dK\right) = \frac{1}{R}(\delta(x_1)-\delta(x_2)) = \frac{1}{R}(\delta(-x_1)-\delta(-x_2))$

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{\delta\left(\tau-\frac{R}{c}\right)-\delta\left(\tau+\frac{R}{c}\right)}{R}\,\Big|\,\tau+\frac{R}{c} = t-t'+\frac{R}{c}$ wird für $t > t'$ niemals 0

$\mathrm{G}(\vec R,\tau) = \frac{\delta\left(\tau-\frac{R}{c}\right)}{R}\,\Big|\,\vec R \overset{\text{def}}{=} \vec r-\vec r' \Longrightarrow R = |\vec R| = |\vec r-\vec r'|;\ \tau \overset{\text{def}}{=} t-t'$

$\mathrm{G}(\vec r,\vec r',t,t') = \frac{\delta\left(t-t'-\frac{1}{c}|\vec r-\vec r'|\right)}{|\vec r-\vec r'|};\ t' = t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}$

Retard. Potentiale:	$\phi(t,\vec r) = \int\rho\left(t-\frac{\lvert\vec r-\vec r'\rvert}{c},\vec r'\right)\frac{1}{\lvert\vec r-\vec r'\rvert}dV',\ \vec A(t,\vec r) = \int\vec j\left(t-\frac{\lvert\vec r-\vec r'\rvert}{c},\vec r'\right)\frac{1}{\lvert\vec r-\vec r'\rvert}dV';$

Harmonisch schwingende Punktladung

Nahfeld	$\vec{E}(t,\vec{r})=\frac{q}{r^2}\hat{e}_r+\frac{3\hat{e}_r[\hat{e}_r\cdot\vec{p}(t)]-\vec{p}(t)}{r^3}$; $\vec{E}(t,\vec{r})=\frac{\dot{\vec{p}}(t)}{r^2c}\times\hat{e}_r$	Fernfeld	$\vec{E}(t,\vec{r})=\frac{\hat{e}_r[\hat{e}_r\cdot\ddot{\vec{p}}(t-r/c)]-\ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{rc^2}$; $\vec{E}(t,\vec{r})=\frac{\ddot{\vec{p}}(t-r/c)}{rc^2}\times\hat{e}_r\propto\frac{1}{r}$		
Dipol-moment	$\vec{p}(t)=q\,\vec{x}(t)=q\vec{x}_0\sin(\omega t)$	Larmor-Formel Abgestr. Leistung	$\langle P\rangle=\frac{2q^2\dot{\beta}^2}{3c}=\frac{2q^2\ddot{\vec{x}}^2}{3c^3}\propto q^2\ddot{\vec{x}}^2$		
Thomson Streuqu.	$\sigma(\omega)=\frac{\langle P\rangle}{\langle\lvert\vec{S}\rvert\rangle}=\frac{8\pi q^4}{3m^2c^4}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}$	Thomson-Streuquerschnitt:	$\sigma_T(\omega)=\sigma(\omega)\rvert_{\omega_0\ll\omega}=\frac{8\pi q^4}{3m^2c^4}$	Rayleigh Streuung	$\sigma_r(\omega)=\sigma(\omega)\rvert_{\omega_0\gg\omega}=\frac{8\pi q^4}{3m^2c^4}\frac{\omega^4}{\omega_0^4}$

Sonstiges

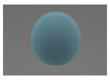
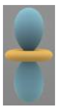
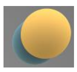
Kugel:	$\begin{pmatrix}r\\ \vartheta\\ \varphi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x=r\sin\vartheta\cos\varphi\\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi\\ z=r\cos\vartheta\end{pmatrix}$; $det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}\right)=r^2\sin\vartheta$	Zylinder:	$\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ z\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z\end{pmatrix}$; $det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}\right)=r$; $\left\lvert\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{r^2+z^2}$
Einh-vekt. Kugel	$\hat{e}_r=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$; $\hat{e}_\vartheta=\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2)}}\begin{pmatrix}zx\\ zy\\ -x^2-y^2\end{pmatrix}$; $\hat{e}_\varphi=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$	Einh-vekt. Zyl.	$\hat{e}_r=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 0\end{pmatrix}$; $\hat{e}_\varphi=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$; $\hat{e}_z=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

Nabla karthe-sisch:	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$	Nabla Zylinder-koord.:	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$	Nabla Kugel-koord.	$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\\ \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{pmatrix}$	La-place Δ	Karth.: $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Zylinder: $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Kugel: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ Allgem.: $\frac{1}{\sqrt{\lvert g\rvert}}\partial_i\left(g^{ij}\sqrt{\lvert g\rvert}\partial_j\right)$

Rotation karthe-sisch:	$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\end{pmatrix}$	Rotation Kugel-koord.:	$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}F_r\\ F_\vartheta\\ F_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(F_\varphi\sin\vartheta)-\frac{\partial F_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\\ \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\vartheta)-\frac{\partial F_r}{\partial\vartheta}\right]\end{pmatrix}$	Rotation Zylinder-koord	$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}F_r\\ F_\varphi\\ F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\\ \frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)-\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}\right]\end{pmatrix}$

Flächenelement in Kugelkoord.:	$dA=r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta$	Flächenelement Polarkoord.:	$dA=r\,dr\,d\varphi$	Linielelement Polarkoord:	$dr=r\,d\varphi$

Deltafunktion in D Dimensionen:	$\delta^{(D)}(\vec{x})=\frac{\delta(x_1)\,\delta(x_2)\ldots\delta(x_D)}{\sqrt{\lvert g\rvert}}$	Fourier-Transformation:	$\widehat{\delta^{(D)}}(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^D}\Longrightarrow\delta^{(D)}(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^D}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\,dk$	
	Zylinderkoord.:	$\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(r-r_0)\,\delta(z-z_0)\frac{\delta(\varphi-\varphi_0)}{r}$	Kugelkoord.:	$\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(r-r_0)\frac{\delta(\vartheta-\vartheta_0)}{r}\frac{\delta(\varphi-\varphi_0)}{r\sin(\vartheta)}$
Legendre-Polynome:	$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-2k)!k!2^n}x^{n-2k}$	orthogonal:	$\int_a^b\rho(x)\,P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0,m\neq n$	
	$P_0(x)=1;\ P_1(x)=x;\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1);\ P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x);\ldots$			
Zugeord. Leg.-Polyn.:	$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$	$P_l^0(x)=P_l(x)$; $P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2}$; $P_2^1(x)=-3x\sqrt{1-x^2}$; $P_2^2(x)=3(1-x^2)$		

Kugel-flächen-funktion	$Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}$	$Y_{l,m}^*=(-1)^mY_{l,-m}$; $Y_{l,m}(\pi-\vartheta,\pi+\varphi)=(-1)^l\,Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$					
	$Y_{0,0}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$; $Y_{1,-1}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\vartheta)\,e^{-i\varphi}$; $Y_{1,0}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\vartheta)$; $Y_{1,1}(\vartheta,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\vartheta)\,e^{i\varphi}$						
	$Y_{2,0}(\vartheta,\varphi)=-\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2(\vartheta)-1)$	$Y_{l,0}(0,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$; $Y_{l,m}(0,\varphi)_{\lvert m\neq0}=Y_{l,m}(\pi,\varphi)_{\lvert m\neq0}=0$; $Y_{l,0}(\pi,\varphi)=(-1)^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$					
	l=0 m=0 	l=1 m=0 	l=2 m=0 	l=3 m=0 	l=1 m=-1 	l=1 m=1 	m=0 … rot.sym. um z $Y(\varphi)=Y(-\varphi)$ l gerade: spiegels. um 0 $Y(\vartheta)=Y(-\vartheta)$