Merkzettel „Integralrechnung“ II

02.09.2016

Grundlagen:

1. HS:	Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\mathrm{F}(x)=\int_a^x \mathrm{f}(\xi)\,d\xi$ auf [a,b] stetig differenzierbar, und es gilt: $\mathrm{F}'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x \mathrm{f}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(x)$
2. HS:	Sei $f: I\to\mathbb{R}$ stetig, und *F* sei eine Stammfunktion von *f*. Dann gilt für $a,b\in I$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(x)\big\vert_a^b$
1. MWS:	Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists\xi[a,b]$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{f}(\xi)\,(b-a)$
2. MWS:	Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $\omega:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, und $\omega(x)\geq 0, x\in[a,b]$, $\int_a^b \omega(x)\,dx>0$. Dann $\exists\xi[a,b]$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\omega(x)\,dx=\mathrm{f}(\xi)\int_a^b \omega(x)\,dx$

Grundintegrale:

$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\vert x\vert+C$	$\int e^x\,dx=e^x+C$	$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\operatorname{arsinh}x+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$
$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$	$\int \cos x\,dx=\sin x+C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=-\cot x+C$	
$\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$	$\int \cosh x\,dx=\sinh x+C$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx=\tanh x+C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx=-\coth x+C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C\ \ (\vert x\vert<1)$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\operatorname{arcosh}x+C=\ln\left\vert x+\sqrt{x^2-1}\right\vert+C\ (\vert x\vert>1)$		
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{artanh}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C\ \ (\vert x\vert<1)$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{arcotanh}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}+C\ \ (\vert x\vert>1)$			
Wichtige Integrale:	$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$	$\int \sin^2(x)\,dx=\frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}+C$	$\int \cos^2(x)\,dx=\frac{x+\sin(x)\cos(x)}{2}+C$	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$

Integrationsmethoden:

a) $\int f'g=fg-\int fg'$	**b)** $\int f^n f'\,dx \ldots u=f$	**c)** $\int \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}\,dx \ldots u=\mathrm{f}(x)$	**d)** $\int \mathrm{R}(ax+b)\,dx \ldots u=ax+b$	**e)** $\int \mathrm{R}(e^{ax})\,dx \ldots u=e^{ax}$
f) $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx\right) \ldots u=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	**g)** $\int R(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x) \ldots \tan\frac{x}{2}=u;\ dx=\frac{2}{1+u^2};\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2};\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$			
h) $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx \ldots\ x=a\sinh u$	**i)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \ldots\ x=a\cosh u$	**j)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \ldots\ x=a\sin u\ \vee x=a\cos u\to$ g)		
k) $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{a^2+(bx^2)}\right)dx \ldots\ x=\frac{b}{a}\tan u$	**l)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \ldots quadratische\ Erweiterung\to$ h), i) oder j)			
m) $\int \mathrm{p}(x)\,e^{ax}\,dx\to$ a) mit $f'=e^{ax};\ g=\mathrm{p}(x)$	**n)** $\int \mathrm{p}(x)\sin(ax)\,dx\to$ a) mit $f'=\sin(ax);\ g=\mathrm{p}(x)$	**o)** wie n) mit $\cos(ax)$		
p) $\int \frac{1}{cos^m x}\,dx=\frac{\sin x}{(m-1)\,cos^{m-1}x}+\frac{m-2}{m-1}\int \frac{1}{cos^{m-2}x}\,dx$	**q)** $\int sin^m x\,dx=-\frac{\cos x\,sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}\int sin^{m-2}x\,dx$			
r) $\int \mathrm{f}^{-1}(x)\,dx=x\,\mathrm{f}^{-1}(x)-\mathrm{F}(\mathrm{f}^{-1}(x))+C;mit\ \ \mathrm{F}(x)=\int \mathrm{f}(x)\,dx$	**s)** $\int \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))\,\mathrm{g}'(x)\,dx \ldots u=\mathrm{g}(x)$	**t)** $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx \ldots\ u=a\tan s$		

Partielle Integration:

In $\mathbb{R}^1$:	$\int f'g\,dx=fg-\int fg'\,dx$	In $\mathbb{R}^2$:	$\int_{(x,y)G}(\nabla\cdot\vec{f})\,g\,d(x,y)=\int_{\partial G}\vec{f}g\cdot d\vec{n}+\int_{(x,y)\in G}\vec{f}\cdot(\nabla g)\ d(x,y)$
In $\mathbb{R}^3$:	$\int_{(x,y)\in G}(\nabla\cdot\vec{f})\,g\,dV=\int_{\partial G}\vec{f}g\cdot d\vec{A}+\int_{(x,y)\in G}\vec{f}\cdot(\nabla g)\ dV$		

Koordinatentransformation:

Jacobi:	$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}$	Polar:	$\begin{pmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{pmatrix};\ \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right)=r$	Zylinder:	$\begin{pmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{pmatrix};\ \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right)=r$
		Kugel	$\begin{pmatrix}x=r\sin\vartheta\cos\varphi\\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi\\ z=r\cos\vartheta\end{pmatrix};\ \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\vartheta,\varphi,r)}\right)=r^2\sin\vartheta$	Ellipse $\to$ polar	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad \begin{matrix}x=as;\ dx=a\,ds\\ y=bt;\ dy=b\,dt\end{matrix}$

Kurvenlängen und Kurvenintegrale:

Kurvenlänge von $\vec{r}(t)$:	$s=\int_{t_a}^{t_b}\lvert\vec{r}'(t)\rvert\,dt=\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\,dt$	Kurvenl. von y=y(x)	$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$	Kurvenl. v. r=r(φ)	$s=\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$
Maßtensor der Fläche $\vec{r}(u,v)$	$M(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} & \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} & \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\end{pmatrix}$	Länge einer Flächenkurve $\vec{r}(\vec{w}(t))$	$s=\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{\vec{w}'(t)^T\,M(\vec{w}(t))\,\vec{w}'(t)}\,dt$		
Kurvenintegral des Skalarfeldes $\rho(\vec{r})$ entlang d. Kurve $C=\{\vec{r}(t)\,;a\le t\le b\}$:	$\int_C\rho\,ds=\int_a^b\rho(\vec{r}(t))\lvert\vec{r}'(t)\rvert\,dt$	Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entl. d. Kurve C:	$\int_C\vec{a}\,d\vec{r}=\int_a^b\vec{a}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$		
Kurvenintegral Gradientenfeld:	Wenn $\vec{a}(\vec{r}(t))=\nabla\phi(\vec{r}(t))$, dann ist $\int_C\vec{a}\,d\vec{r}=\phi(\vec{r}(b))-\phi(\vec{r}(a))$	Notw. Bed. in $\mathbb{R}^2$:	$\frac{\partial a_y}{\partial x}=\frac{\partial a_x}{\partial y}$		
Hinreichende Bedingung: Ist $\nabla\times\vec{a}(\vec{r})=0$ („wirbelfrei") im einfach zusammenhängenden Gebiet G, dann ist $\vec{a}(\vec{r})$ in G ein Gradientenfeld.					
(Gradientenfeld) ⇔(wegunabhängig); (Gradientenfeld) ⇒ (wirbelfrei); (wirbelfrei ∧ einfach zusammenhängend) ⇒ (Gradientenfeld)					

Flächenintegrale:

Flächeninhalt A der regulär orient. Fläche $F=\{\vec{r}(u,v)\in\mathbb{R}^3:(u,v)\in B\}$	$A=\int_F dA$	Skalares Flächenelement	$dA=\lVert\vec{n}(u,v)\rVert\,d(u,v)=\sqrt{\det(M(u,v))}\,d(u,v);\ \vec{n}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$
Flächenintegral des Skalarfeldes $\rho(\vec{r})$ über d. Fläche $F=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in B\}$	$\int_F\rho\,dA=\int_{(u,v)\in B}\rho(\vec{r}(u,v))\,\lVert\vec{n}(u,v)\rVert\,d(u,v)=\int_{(u,v)\in B}\rho(\vec{r}(u,v))\sqrt{\det(M(u,v))}\,d(u,v)$		
Flächenintegral des stetigen Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ über Fläche $F=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in B\}$ (Fluss von $\vec{a}$ durch F in Richtung $\vec{n}$)	$\int_F\vec{a}(\vec{r}(u,v))\cdot d\vec{A}$	Vektorielles Flächenelement	$d\vec{A}=\vec{n}(u,v)\,d(u,v)$
Flächenelement in Kugelkoordinaten: $dA=r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta$	Flächenelement in Polarkoordinaten:	$dA=r\,dr\,d\varphi$	

Integralsätze:

Satz v. Green: Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(x,y)$ entl. der Kurve ∂G (in $\mathbb{R}^2$) überführen in Flächenintegral über eingeschlossenes Gebiet G:	$\int_{\partial G}\vec{a}\,d\vec{r}=\int_G\operatorname{rot}(\vec{a})\,d(x,y)=\int_G\left(\frac{\partial a_y}{\partial a_x}-\frac{\partial a_x}{\partial a_y}\right)d(x,y)$
Satz von Stokes: Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entl. der Kurve $\partial F=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in\partial G\}$ überführen in Flächenintegral über eigeschlossene Fläche $F=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in G\}$	$\int_{\partial F}\vec{a}(\vec{r}(t))\,d\vec{r}=\int_F(\vec{\nabla}\times\vec{a}(\vec{r}))(u,v)\cdot d\vec{A};\ mit\ d\vec{A}=\vec{n}(u,v)\,d(u,v)$
Satz von Gauß (Divergenzsatz): Flächenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ über die Randfläche $\partial V=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in\partial V\}$ (Fluss) überführen in Volumsintegral über eigeschlossenes Volumen $V=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in V\}$	$\int_{\partial V}\vec{a}(\vec{r}(u,v))\cdot d\vec{A}=\int_V\vec{\nabla}\cdot\vec{a}(x,y,z)\,dV$
Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$: Fluss des Vektorfeldes $\vec{a}(x,y)$ durch die Randkurve ∂G ist gleich der Gesamtdivergenz von $\vec{a}(x,y)$ im eingeschlossenen Gebiet G	$\int_{\partial G}\vec{a}\cdot d\vec{n}=\int_{\partial G}(a_x\,dy-a_y\,dx)=\int_G(\nabla\cdot\vec{a}(x,y))\,d(x,y)$
Greensche Formel in $\mathbb{R}^3$:	$\int_G(f\nabla^2g-g\nabla^2f)\,dV=\int_{\partial G}(f\nabla g-g\nabla f)\cdot d\vec{A}$
Greensche Formel in $\mathbb{R}^2$:	$\int_G(f\nabla^2g-g\nabla^2f)\,d(x,y)=\int_{\partial G}(f\nabla g-g\nabla f)\cdot d\vec{n}$ — **in $\mathbb{R}^1$** $\int(fg''-gf'')\,dx=fg'-gf'$

Faltung und Dirac'sche Delta-Funktion:

Faltung	in $\mathbb{R}^1$: $(f*g)(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\xi)\,g(\xi)\,d\xi$	in $\mathbb{R}^3$: $(f*g)(\vec{R}):=\int_{\vec{r}\in\mathbb{R}^3}f(\vec{R}-\vec{r})\,g(\vec{r})\,dV_{\vec{r}}$	
Delta-Funktion (Delta-Distribution):	$\delta(x):=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\right)\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1;\ \int_a^b\delta(x)\,dx=\begin{cases}1,\text{für }0\in[a,b]\\0,\text{sonst}\end{cases}$		$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=\varphi(x_0)$
Heavyside-Funktion	$H(x):=\lim_{\varepsilon\to0}\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\right)=\begin{cases}0,x<0\\\frac{1}{2},x=0\\1,x>0\end{cases}$	$\int_a^b\delta(x)\,dx=H(b)-H(a)$	$\int_{\vec{r}\in\mathbb{R}^3}\varphi(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV_{\vec{r}}=\varphi(\vec{r}_0)$

Fouriertransformation:

Fourier-Transformierte	$\hat{f}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ikx}\,dx\left\{\begin{array}{l}f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}\end{array}\right.$	Rücktransformation	$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\,e^{ikx}\,dk$	Wenn f in x nicht stetig:	$\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\,e^{ikx}\,dk$
Linearität: $(\widehat{af+bg})=a\hat{f}+b\hat{g}$	Fourier-Transf. d. 1. Ableitung: $\widehat{f'}(k)=ik\,\hat{f}(k)$	2. Ableitung	$\widehat{f''}(k)=-k^2\,\hat{f}(k)$	n-te Ableitung:	$\widehat{f^{(n)}}(k)=(ik)^n\,\hat{f}(k)$
Ableitung d. Fourier-Trans.	$(\hat{f}(k))'=(\widehat{-ix\,f(x)})(k)$	Fourier-Transf. einer Faltung:	$(\widehat{f*g})(k)=\hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$	Fourier-Transf. der part. 2. Abl.:	$\widehat{\frac{\partial^2u}{\partial y^2}}=\frac{\partial^2\hat{u}(k,y)}{\partial y^2}$
$\hat{f}$ beschränkt:	Wenn $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-ikx}\,dx$ existiert (Voraussetzung für Fouriertransformation), dann: $\lvert\hat{f}(k)\rvert\le\int_{-\infty}^{+\infty}\lvert f(x)\rvert\,dx$				

Cauchy'sche Integral- und Ableitungsformel:

Die stückweise glatte, geschlossene Kurve C sei der Rand des Gebietes B, und $\mathrm{f}(\underline{z})$ sei differenzierbar in $\overline{B}$ („holomorph"). Sei $\underline{z}_0 \in B$.	$\mathrm{f}(\underline{z}_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{f}(\underline{z})}{\underline{z} - \underline{z}_0} dz$	Cauchy'sche Ableitungsformel:	$\mathrm{f}^{(n)}(\underline{z}_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{\mathrm{f}(\underline{z})}{(\underline{z} - \underline{z}_0)^{n+1}} dz$

Cauchy'scher Residuensatz:

Sei C eine stückweise glatte, geschlossene Kurve, und f sei auf C und in ihrem inneren analytisch, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_0 \dots z_n$ im Inneren von C:	$\oint_C \mathrm{f}(\underline{z})\, dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \mathrm{f}(\underline{z})$	$\mathrm{Res}_{z=z_n} \mathrm{f}(\underline{z})$ ist der Koeffizient c_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f um z_0:	$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \mathrm{f}(\underline{z}) = c_{-1}$
Residuum bei Pol 1. Ordnung:	$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \mathrm{f}(\underline{z}) = \lim_{z \to z_0} (\underline{z} - \underline{z}_0)\, \mathrm{f}(\underline{z})$	Residuum bei Pol m. Ordnung:	$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \mathrm{f}(\underline{z}) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((\underline{z} - \underline{z}_0)^m\, \mathrm{f}(\underline{z})\right)$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(\frac{\mathrm{P}(\underline{z})}{\mathrm{Q}(\underline{z})}\right)$	P, Q … reelle Polynome Grad Q ≥ Grad P+2	Q: keine reellen NST Nur z_k mit $\mathrm{Im}(z_k)$>0	
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} \sin(x)\, dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(\frac{\mathrm{P}(\underline{z})}{\mathrm{Q}(\underline{z})} e^{iz}\right)\right)$	P, Q … reelle Polynome Grad Q ≥ Grad P+1	Q: keine reellen NST Nur z_k mit $\mathrm{Im}(z_k)$>0	
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} \cos(x)\, dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left(\frac{\mathrm{P}(\underline{z})}{\mathrm{Q}(\underline{z})} e^{iz}\right)\right)$	P, Q … reelle Polynome Grad Q ≥ Grad P+1	Q: keine reellen NST Nur z_k mit $\mathrm{Im}(z_k)$>0	
$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}(\cos x, \sin x)\, dx = \frac{1}{i} \oint_{C_1} \frac{1}{z} \mathrm{R}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) dz$	R … rationale Funktion C_1 … Einheitskreis	R darf keine Singularität am Rand von C_1 haben	

Sonstiges:

Komplanation y=y(x) (Drehung um x-Achse)	$O_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$	Komplanation $\vec{\mathrm{r}}(t) \in \mathbb{R}^2$ (Drehung um x-Achse)	$O_x = 2\pi \int_{t_a}^{t_b} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$
Volumen y=y(x) (Drehung um x- und y-Achse)	$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx;\ V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\, dy = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 y'\, dx$	Volumen $\vec{\mathrm{r}}(t) \in \mathbb{R}^2$	$V_x = \pi \int_{t_a}^{t_b} y^2 \dot{x}\ dt\,;V_y = \pi \int_{t_a}^{t_b} x^2 \dot{y}\ dt$
Volumsintegral allg.:	$I = \int_{a_z}^{b_z} \int_{a_y}^{b_y} \int_{a_x}^{b_x} \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_\vartheta}^{b_\vartheta} \int_{a_\varphi}^{b_\varphi} \int_{a_r}^{b_r} r^2 \sin\vartheta\, \rho(r,\varphi,\vartheta)\, dr\, d\varphi\, d\vartheta = \int_{a_z}^{b_z} \int_{a_\varphi}^{b_\varphi} \int_{a_r}^{b_r} r^2\, \rho(r,\varphi,z)\, dr\, d\varphi\, dz$		
Ableitung nach oberer Grenze	$\frac{d}{dx} \int_a^x \mathrm{f}(\tau)\, d\tau = \mathrm{f}(x)$	$I_{Kepler} = \frac{x_e - x_a}{6}(y_a + 4y_m + y_e)$	$I_{Simpson} = \frac{x_e - x_a}{6n}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots) + y_{2n}]$
Ansatz bei doppelt komplexer NST eines Nenners $(x^2+px+q)^2$:	$\int \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} + C \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx \ \rightarrow \mathit{beide\ Seiten\ ableiten\ nach\ x}$		