Merkzettel „Integralrechnung“ III

26.11.2021

Grundlagen:

1. HS:	Sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\mathrm{F}(x)=\int_a^x \mathrm{f}(\xi)\,d\xi$ auf [a,b] stetig differenzierbar, und es gilt: $\mathrm{F}'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x \mathrm{f}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(x)$
2. HS:	Sei $f\colon I\to\mathbb{R}$ stetig, und F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $a,b\in I$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(x)\,\Big\vert_a^b$
1. MWS:	Sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists\xi[a,b]$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{f}(\xi)\,(b-a)$
2. MWS:	Sei $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $\omega\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, und $\omega(x)\geq 0, x\in[a,b]$, $\int_a^b \omega(x)\,dx>0$. Dann $\exists\xi[a,b]$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\omega(x)\,dx=\mathrm{f}(\xi)\int_a^b \omega(x)\,dx$

Grundintegrale:

- $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
- $\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\lvert x\rvert+C$
- $\int e^x\,dx=e^x+C$
- $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\operatorname{arsinh}x+C=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$
- $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$
- $\int \cos x\,dx=\sin x+C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=-\cot x+C$
- $\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$
- $\int \cosh x\,dx=\sinh x+C$
- $\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx=\tanh x+C$
- $\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx=-\coth x+C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C\ \ (\lvert x\rvert<1)$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\operatorname{arcosh}x+C=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert+C\ (\lvert x\rvert>1)$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{artanh}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C\ \ (\lvert x\rvert<1)$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{arcotanh}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}+C\ \ (\lvert x\rvert>1)$

Wichtige Integrale:

- $\int \ln(ax)\,dx=x\ln(ax)-x+C$
- $\int \sin^2(x)\,dx=\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))+C$
- $\int \cos^2(x)\,dx=\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))+C$
- $\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx=-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$
- $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_0^\infty t^{\underline{z}-1}e^{-t}\,dt=\Gamma(\underline{z})$; $\mathrm{Re}(\underline{z})>0$
- $\int \lvert x\rvert\,dx=\frac{\lvert x\rvert x}{2}$
- $\int_0^\infty \rho^\alpha e^{-\beta\rho}\,d\rho=\frac{\alpha!}{\beta^{\alpha+1}}$; $\alpha\in\mathbb{N}_0, \beta\in\mathbb{R}^+$
- $\int \mathrm{f}(x)\,e^{-a\,\mathrm{f}(x)}\,dx=-\frac{\partial}{\partial a}\int e^{-a\,\mathrm{f}(x)}\,dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-a(x-x_0)^2}\,dx=x_0\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2+a^2}\,d\omega=\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert t\rvert}$
- $\int \ln(\mathrm{y}(x))\,dx=\ln(\mathrm{y}(x))$ weil $\frac{d}{dx}\ln(\mathrm{y}(x))=\frac{\mathrm{y}'(x)}{\mathrm{y}(x)}$
- $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega'=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f(\omega')-f(\omega)}{\omega'-\omega}\,d\omega'$
- $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\alpha+i\varepsilon}=\mathcal{P}\frac{1}{\alpha}-i\pi\,\delta(\alpha)\Longrightarrow\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(\omega')}{\alpha+i\varepsilon}\,d\omega'=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{P}\frac{y(\omega')}{\alpha}-i\pi\,y(\omega')\,\delta(\alpha)\right)d\omega'$

Chauchyscher Hauptwert (Principal Value)

Sei a<c<b und habe $\mathrm{f}(x)$ bei x=c eine Polstelle, dann ist der Cauchysche Hauptwert $\mathcal{P}\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon}\mathrm{f}(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon}^b \mathrm{f}(x)\,dx\right)$

Integrationsmethoden

- **a)** $\int f'g=fg-\int fg'$
- **b)** $\int f^n f'\,dx\,\ldots u=f$
- **c)** $\int \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}\,dx\,\ldots u=\mathrm{f}(x)$
- **d)** $\int \mathrm{R}(ax+b)\,dx\,\ldots u=ax+b$
- **e)** $\int \mathrm{R}(e^{ax})\,dx\,\ldots u=e^{ax}$
- **f)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx\right)\ldots u=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- **g)** $\int R(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x)\ldots \sin x=\frac{2u}{1+u^2}$; $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$; $\tan\frac{x}{2}=u$; $dx=\frac{2}{1+u^2}$
- **h)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx\ \ldots\ x=a\sinh u$
- **i)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx\ \ldots\ x=a\cosh u$
- **j)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx\ \ldots\ x=a\sin u\ \vee x=a\cos u\to$ g)
- **k)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{a^2+b^2x^2}\right)dx\ \ldots\ x=\frac{a}{b}\tan u$
- **l)** $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx\ \ldots\ quadratische\ Erweiterung\to$ h), i) oder j)
- **m)** $\int \mathrm{p}(x)\,e^{ax}\,dx\to$ a) mit $f'=e^{ax}$; $g=\mathrm{p}(x)$
- **n)** $\int \mathrm{p}(x)\sin(ax)\,dx\to$ a) mit $f'=\sin(ax)$; $g=\mathrm{p}(x)$
- **o)** wie n) mit $\cos(ax)$
- **p)** $\int \frac{1}{cos^m x}\,dx=\frac{\sin x}{(m-1)\,cos^{m-1}x}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{1}{cos^{m-2}x}\,dx$
- **q)** $\int sin^m x\,dx=-\frac{\cos x\,sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}\int sin^{m-2}x\,dx$
- **r)** $\int \mathrm{f}^{-1}(x)\,dx=x\,\mathrm{f}^{-1}(x)-\mathrm{F}(\mathrm{f}^{-1}(x))+C;mit\ \ \mathrm{F}(x)=\int\mathrm{f}(x)\,dx$
- **s)** $\int \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))\,\mathrm{g}'(x)\,dx\ldots u=\mathrm{g}(x)$
- **t)** $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,dx\ \ldots\ x=a\tan s$
- **u)** $\int \frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{\frac{1}{\cos x}\left(\tan x+\frac{1}{\cos x}\right)}{\left(\tan x+\frac{1}{\cos x}\right)}\,dx\ \ldots\ s=\tan x+\frac{1}{\cos x}$
- **v)** $\int \frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{\frac{1}{\sin x}\left(\cot x+\frac{1}{\sin x}\right)}{\left(\cot x+\frac{1}{\sin x}\right)}\,dx\ \ldots\ s=\cot x+\frac{1}{\sin x}$
- **w)** $\int \frac{1}{(a^2-b^2x^2)^{3/2}}\,dx\ \ldots\ x=\frac{a}{b}\sin s$
- **x)** $\int \mathrm{f}(x)\,e^{a\,\mathrm{f}(x)}\,dx=\frac{\partial}{\partial a}\int e^{a\,\mathrm{f}(x)}\,dx$
- **y)** $\int \frac{x}{(x^2+a^2)^{5/2}}\,dx\ \ldots\ x=a\tan s$

Partielle Integration

In $\mathbb{R}^1$:	$\int f'g\,dx=fg-\int fg'\,dx$	In $\mathbb{R}^2$:	$\int_{(x,y)G}(\nabla\cdot\vec{f})\,g\,d(x,y)=\int_{\partial G}\vec{f}g\cdot d\vec{n}+\int_{(x,y)\in G}\vec{f}\cdot(\nabla g)\ d(x,y)$
In $\mathbb{R}^3$:	$\int_{(x,y)\in G}(\nabla\cdot\vec{f})\,g\,dV=\int_{\partial G}\vec{f}g\cdot d\vec{A}+\int_{(x,y)\in G}\vec{f}\cdot(\nabla g)\ dV$		

Koordinatentransformation:

Jacobi:	$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$	Polar:	$\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{pmatrix}$; $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right) = r$	Zylinder:	$\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{pmatrix}$; $\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right) = r$
		Kugel	$\begin{pmatrix} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{pmatrix}$; $\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\vartheta,\varphi,r)}\right) = r^2\sin\vartheta$	Ellipse → polar	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad x = as;\ dx = a\,ds$; $y = bt;\ dy = b\,dt$

Kurvenlängen und Kurvenintegrale:

Kurvenlänge von $\vec{r}(t)$:	$s = \int_{t_a}^{t_b} \lvert\dot{\vec{r}}(t)\rvert\,dt = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,dt$	Kurvenl. von y=y(x)	$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$	Kurvenl. v. r=r(φ)	$s = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$
Maßtensor der Fläche $\vec{r}(u,v)$	$\mathrm{M}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} & \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} & \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \end{pmatrix}$	Länge einer Flächenkurve $\vec{r}(\vec{w}(t))$	$s = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\vec{w}'(t)^T\,\mathrm{M}(\vec{w}(t))\,\vec{w}'(t)}\,dt$	Linienelement in Polarkoordinaten	$dr = r\,d\varphi$

Kurvenintegral des Skalarfeldes $\rho(\vec{r})$ entlang d. Kurve $C = \{\vec{r}(t)\,;a \le t \le b\}$:	$\int_C \rho\,ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t))\lvert\vec{r}'(t)\rvert\,dt$	Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entl. d. Kurve C:	$\int_C \vec{a}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_a^b \vec{a}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt$
Kurvenintegral Gradientenfeld:	Wenn $\vec{a}(\vec{r}(t)) = \nabla\phi(\vec{r}(t))$, dann ist $\int_C \vec{a}\,d\vec{r} = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$	Notw. Bed. in $\mathbb{R}^2$:	$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$
Hinreichende Bedingung: Ist $\nabla\times\vec{a}(\vec{r}) = 0$ („wirbelfrei") im einfach zusammenhängenden Gebiet G, dann ist $\vec{a}(\vec{r})$ in G ein Gradientenfeld.			
(Gradientenfeld) ⇔(wegunabhängig); (Gradientenfeld) ⇒ (wirbelfrei); (wirbelfrei ∧ einfach zusammenhängend) ⇒ (Gradientenfeld)			

Flächenintegrale:

Flächeninhalt A der regulär orient. Fläche $F = \{\vec{r}(u,v) \in \mathbb{R}^3 : (u,v) \in B\}$	$A = \int_F dA$	Skalares Flächenelement	$dA = \lVert\vec{n}(u,v)\rVert\,d(u,v) = \sqrt{\det(\mathrm{M}(u,v))}\,d(u,v)$; $\vec{n} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$
Flächenintegral des Skalarfeldes $\rho(\vec{r})$ über d. Fläche $F = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in B\}$	$\int_F \rho\,dA = \int_{(u,v)\in B} \rho(\vec{r}(u,v))\,\lVert\vec{n}(u,v)\rVert\,d(u,v) = \int_{(u,v)\in B} \rho(\vec{r}(u,v))\sqrt{\det(\mathrm{M}(u,v))}\,d(u,v)$		
Flächenintegral des stetigen Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ über Fläche $F = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in B\}$ (Fluss von $\vec{a}$ durch F in Richtung $\vec{n}$)	$\int_F \vec{a}(\vec{r}(u,v))\cdot d\vec{A}$	Vektorielles Flächenelement	$d\vec{A} = \vec{n}(u,v)\,d(u,v)$
Flächenelement in Kugelkoordinaten:	$dA = r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta$	Flächenelement in Polarkoordinaten:	$dA = r\,dr\,d\varphi$

Integral über Gebiete und Ränder von Bereichen mit Heaviside-Funktion:

Fläche A des Gebiets $\mathrm{f}(x,y) > 0$	$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}(\mathrm{f}(x,y))\,dx\,dy$	Volumen V des Gebiets $\mathrm{f}(x,y,z) > 0$	$V = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{H}(\mathrm{f}(x,y,z))\,dx\,dy\,dz$

Integralsätze:

Satz v. Green: Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(x,y)$ entl. der geschl. Kurve ∂G (in $\mathbb{R}^2$) überführen in Flächenintegral über eingeschl. Gebiet G:	$\oint_{\partial G} \vec{a}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_G \mathrm{rot}(\vec{a})\,d(x,y) = \int_G \left(\frac{\partial a_y}{\partial a_x} - \frac{\partial a_x}{\partial a_y}\right) d(x,y)$		
Satz v. Stokes: Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ entlang der geschlossenen Kurve $\partial F = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \partial G\}$ überführen in Flächenintegral über eigeschl. Fläche $F = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in G\}$	$\oint_{\partial F} \vec{a}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_F [\vec{\nabla}\times\vec{a}](\vec{r}(u,v))\cdot d\vec{A}\,;mit\ d\vec{A} = \vec{n}(u,v)\,d(u,v)$		
Satz von Gauß (Divergenzsatz): Flächenintegral des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$ über die Randfläche $\partial V = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \partial V\}$ (Fluss) überführen in Volumsintegral über eingeschlossenes Volumen $V = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in V\}$	$\oint_{\partial V} \vec{a}(\vec{r}(u,v))\cdot d\vec{A} = \int_V [\vec{\nabla}\cdot\vec{a}](x,y,z)\,dV$		
Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$: Fluss des Vektorfeldes $\vec{a}(x,y)$ durch die Randkurve ∂G ist gleich der Gesamtdivergenz von $\vec{a}(x,y)$ im eingeschlossenen Gebiet G	$\oint_{\partial G} \vec{a}\cdot d\vec{n} = \oint_{\partial G} (a_x\,dy - a_y\,dx) = \int_G [\nabla\cdot\vec{a}](x,y)\,d(x,y)$		
Greensche Formel in $\mathbb{R}^3$:	$\int_G (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV = \int_{\partial G} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot d\vec{A}$		
Greensche Formel in $\mathbb{R}^2$:	$\int_G (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,d(x,y) = \int_{\partial G} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot d\vec{n}$	**in $\mathbb{R}^1$**	$\int (fg'' - gf'')\,dx = fg' - gf'$

Faltung und Dirac'sche Delta-Funktion:

Faltung	in $\mathbb{R}^1$:	$(f*g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(x-\xi)\,\mathrm{g}(\xi)\,d\xi$	in $\mathbb{R}^3$:	$(f*g)(\vec{R}) := \int_{\vec{r}\in\mathbb{R}^3} \mathrm{f}(\vec{R}-\vec{r})\,\mathrm{g}(\vec{r})\,dV_{\vec{r}}$
Delta-Funktion (Delta-Distribution):	$\delta(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1;\ \int_a^b \delta(x)\,dx = \begin{cases} 1, für\ 0 \in [a,b] \\ 0, sonst \end{cases}$			$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \varphi(x_0)$
Heaviside-Funktion	$\mathrm{H}(x) := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}\right) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{2}, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$	$\int_a^b \delta(x)\,dx = \mathrm{H}(b) - \mathrm{H}(a)$		$\int_{\vec{r}\in\mathbb{R}^3} \varphi(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV_{\vec{r}} = \varphi(\vec{r}_0)$

Fouriertransformation:

Fourier-Transformierte	$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx \begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \end{cases}$	Rücktransformation	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$	Wenn f in x nicht stetig:	$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk$		
Linearität:	$\widehat{(af + bg)} = a\hat{f} + b\hat{g}$	Fourier-Transf. d. 1. Ableitung:	$\widehat{f'}(k) = ik\,\hat{f}(k)$	2. Ableitung	$\widehat{f''}(k) = -k^2\,\hat{f}(k)$	n-te Ableitung:	$\widehat{f^{(n)}}(k) = (ik)^n\,\hat{f}(k)$
Ableitung d. Fourier-Trans.	$(\hat{f}(k))' = (\widehat{-ix\, f(x)})(k)$	Fourier-Transf. einer Faltung:	$(\widehat{f * g})(k) = \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$	Fourier-Transf. der part. 2. Abl.:	$\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2\, \hat{u}(k,y)}{\partial y^2}$		
$\hat{f}$ beschränkt:	Wenn $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$ existiert (Voraussetzung für Fouriertransformation), dann: $\lvert\hat{f}(k)\rvert \le \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(x)\rvert\, dx$						

Integral im Komplexen:

Sei $f(t) = \alpha(t) + i\,\beta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ stetig.	$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \alpha(t)\, dt + i \int_a^b \beta(t)\, dt$
Sei $f(z) = u(z) + i\,v(z)$, und $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ $a \le t \le b$ die Parameterdarstellung einer stückweise glatten Kurve C in $\mathbb{C}$. ⟹Kurvenintegral:	$\int_C f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt = \int_a^b [u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x(t), y(t))\, y'(t)]\, dt + i \int_a^b [u(x(t), y(t))\, y'(t) + v(x(t), y(t))\, x'(t)]\, dt$
Sei $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $B \subseteq \mathbb{C}$ differenzierbar (holomorph), dann ist das Kurvenintegral $\int_C f(z)\, dz$ von der Wahl des Integrationsweges unabhängig. $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$ ist der Wert aller Integrale über B, die an z_1 beginnen, und an z_2 enden $(z_1 \neq z_2)$.	$\int_C f(z)\, dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1)$ mit $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$

Lebesque-Integral:

Sei $f[x]$ das Lineare Funktional $f[x] = \int_c^d x(t)\, dt$ und $x(t) \in L^1[a,b]$ der Grenzwert der Funktionenfolge $(x_n(t)) \in C[a,b]$, so dass $x(t) = \lim_{n\to\infty}(x_n(t))$. Dann ist $\boxed{\int_c^d x(t)\, dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_c^d x_n(t)\, dt}$ $(a \le c < d \le b)$ das Lebesque-Integral.

Cauchy'sche Integral- und Ableitungsformel:

Die stückweise glatte, geschlossene Kurve C sei der Rand des Gebietes B, und $f(\underline{z})$ sei differenzierbar in $\overline{B}$ („holomorph"). Sei $\underline{z}_0 \in B$.	$f(\underline{z}_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\underline{z})}{\underline{z} - \underline{z}_0}\, dz$	Cauchy'sche Ableitungsformel:	$f^{(n)}(\underline{z}_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\underline{z})}{(\underline{z} - \underline{z}_0)^{n+1}}\, dz$

Cauchy'scher Residuensatz:

Sei C eine stückweise glatte, geschlossene Kurve, und f sei auf C und in ihrem inneren analytisch, mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_0 \ldots z_n$ im Inneren von C:	$\oint_C f(\underline{z})\, dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} f(\underline{z})$	$\operatorname{Res}_{z=z_n} f(\underline{z})$ ist der Koeffizient c_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f um z_n:	$\operatorname{Res}_{z=z_n} f(\underline{z}) = c_{-1}$
Residuum bei Pol 1. Ordnung:	$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(\underline{z}) = \lim_{z\to z_0} (\underline{z} - \underline{z}_0)\, f(\underline{z})$	Residuum bei Pol m. Ordnung:	$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(\underline{z}) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((\underline{z} - \underline{z}_0)^m\, f(\underline{z})\right)$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} \left(\frac{P(\underline{z})}{Q(\underline{z})}\right)$		P, Q … reelle Polynome Grad Q ≥ Grad P+2	Q: keine reellen NST Nur z_k mit $\mathrm{Im}(z_k)>0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x)\, dx = \mathrm{Im}\left(2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} \left(\frac{P(\underline{z})}{Q(\underline{z})} e^{iz}\right)\right)$		P, Q … reelle Polynome Grad Q ≥ Grad P+1	Q: keine reellen NST Nur z_k mit $\mathrm{Im}(z_k)>0$
$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x)\, dx = \mathrm{Re}\left(2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}_{z=z_k} \left(\frac{P(\underline{z})}{Q(\underline{z})} e^{iz}\right)\right)$		P, Q … reelle Polynome Grad Q ≥ Grad P+1	Q: keine reellen NST Nur z_k mit $\mathrm{Im}(z_k)>0$
$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\, dx = \frac{1}{i} \oint_{C_1} \frac{1}{z} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) dz$		R … rationale Funktion C_1 … Einheitskreis	R darf keine Singularität am Rand von C_1 haben

Sonstiges:

Komplanation y=y(x) (Drehung um x-Achse)	$O_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$	Komplanation $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ (Drehung um x-Achse)	$O_x = 2\pi \int_{t_a}^{t_b} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$
Volumen y=y(x) (Drehung um x- und y-Achse)	$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2\, dx;\ V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\, dy = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 y'\, dx$	Volumen $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^2$	$V_x = \pi \int_{t_a}^{t_b} y^2 \dot{x}\, dt;\ V_y = \pi \int_{t_a}^{t_b} x^2 \dot{y}\, dt$
Volumsintegral allg.:	$I = \int_{a_z}^{b_z}\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x} \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_\vartheta}^{b_\vartheta}\int_{a_\varphi}^{b_\varphi}\int_{a_r}^{b_r} \sin\vartheta\, \rho(r,\varphi,\vartheta)\, r^2\, dr\, d\varphi\, d\vartheta = \int_{a_z}^{b_z}\int_{a_\varphi}^{b_\varphi}\int_{a_r}^{b_r} \rho(r,\varphi,z)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$		
Ableitung nach oberer Grenze	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\tau)\, d\tau = f(x)$	$I_{Kepler} = \frac{x_e - x_a}{6}(y_a + 4y_m + y_e)$	$I_{Simpson} = \frac{x_e - x_a}{6n}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots) + y_{2n}]$
Ansatz bei doppelt komplexer NST eines Nenners $(x^2+px+q)^2$:	$\int \frac{P(x)}{(x^2 + px + q)^2}\, dx = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} + C \int \frac{1}{x^2 + px + q}\, dx \ \rightarrow$ *beide Seiten ableiten nach x*		