Merkzettel „Integralrechnung“

10.2.2016

Grundlagen:

1. HS:	Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\mathrm{F}(x)=\int_a^x \mathrm{f}(\xi)\,d\xi$ auf [a,b] stetig differenzierbar, und es gilt: $\mathrm{F}'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x \mathrm{f}(\xi)\,d\xi=\mathrm{f}(x)$
2. HS:	Sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig, und *F* sei eine Stammfunktion von *f*. Dann gilt für $a,b\in I$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=\mathrm{F}(x)\big\|_a^b$
1. MWS:	Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists\xi[a,b]$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,dx=\mathrm{f}(\xi)\,(b-a)$
2. MWS:	Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $\omega:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, und $\omega(x)\geq 0, x\in[a,b]$, $\int_a^b \omega(x)\,dx>0$. Dann $\exists\xi[a,b]$: $\int_a^b \mathrm{f}(x)\,\omega(x)\,dx=\mathrm{f}(\xi)\int_a^b \omega(x)\,dx$

Grundintegrale:

$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln\|x\|+C$	$\int e^x\,dx=e^x+C$	$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\operatorname{arsinh}x+C=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$
$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$	$\int \cos x\,dx=\sin x+C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx=-\cot x+C$	
$\int \sinh x\,dx=\cosh x+C$	$\int \cosh x\,dx=\sinh x+C$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx=\tanh x+C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx=-\coth x+C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C\ (\|x\|<1)$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\operatorname{arcosh}x+C=\ln\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\|+C\ (\|x\|>1)$		
$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{artanh}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C\ \ (\|x\|<1)$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx=\operatorname{arcotanh}x+C=\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}+C\ \ (\|x\|>1)$	$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$		

Integrationsmethoden:

a) $\int f'g=fg-\int fg'$	**b)** $\int f^n f'\,dx\ \ldots u=f$	**c)** $\int \frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)}\,dx\ \ldots u=\mathrm{f}(x)$	**d)** $\int \mathrm{R}(ax+b)\,dx\ \ldots u=ax+b$	**e)** $\int \mathrm{R}(e^{ax})\,dx\ \ldots u=e^{ax}$
f) $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx\right)\ldots u=\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$	**g)** $\int R(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x)\ \ldots \tan\frac{x}{2}=u;\ dx=\frac{2}{1+u^2};\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2};\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$			
h) $\int \mathrm{R}(x,\sqrt{a^2+x^2})\,dx\ \ldots\ x=a\sinh u$	**i)** $\int \mathrm{R}(x,\sqrt{x^2-a^2})dx\ \ldots\ x=a\cosh u$	**j)** $\int \mathrm{R}(x,\sqrt{a^2-x^2})dx\ \ldots\ x=a\sin u\ \vee\ x=a\cos u\to$ g)		
k) $\int \mathrm{R}\left(x,\sqrt{a^2+(bx^2)}\right)dx\ \ldots\ x=\frac{b}{a}\tan u$	**l)** $\int \mathrm{R}(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx\ \ldots$ *quadratische Erweiterung* $\to$ h), i) oder j)			
m) $\int \mathrm{p}(x)\,e^{ax}\,dx\to$ a) mit $f'=e^{ax};\ g=\mathrm{p}(x)$	**n)** $\int \mathrm{p}(x)\sin(ax)\,dx\to$ a) mit $f'=\sin(ax);\ g=\mathrm{p}(x)$	**o)** wie n) mit $\cos(ax)$		
p) $\int \frac{1}{\cos^m x}\,dx=\frac{\sin x}{(m-1)\cos^{m-1}x}+\frac{m-2}{m-1}\int \frac{1}{\cos^{m-2}x}\,dx$	**q)** $\int \sin^m x\,dx=-\frac{\cos x\sin^{m-1}x}{m}+\frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}x\,dx$			
r) $\int \mathrm{f}^{-1}(x)\,dx=x\,\mathrm{f}^{-1}(x)-\mathrm{F}(\mathrm{f}^{-1}(x))+C;$ *mit* $\mathrm{F}(x)=\int \mathrm{f}(x)\,dx$	**s)** $\int \mathrm{f}(\mathrm{g}(x))\,\mathrm{g}'(x)\,dx\ \ldots u=\mathrm{g}(x)$			

Koordinatentransformation:

Jacobi:	$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{pmatrix}$	Polar:	$\begin{pmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{pmatrix}$; $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right)=r$	Zylinder:	$\begin{pmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ z=z\end{pmatrix}$; $\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right)=r^2$
		Kugel:	$\begin{pmatrix}x=r\sin\vartheta\cos\varphi\\ y=r\sin\vartheta\sin\varphi\\ z=r\cos\vartheta\end{pmatrix}$; $\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\vartheta,\varphi,r)}\right)=r^2\sin\vartheta$		

Sonstiges:

Bogenlänge von $\vec{\mathrm{r}}(t)$:	$s=\int_{t_a}^{t_b}\|\vec{\mathrm{r}}'(t)\|\,dt=\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}\,dt$	Bogenl. von y=y(x)	$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx$
Bogenl. v. r=r(φ)	$s=\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$		
Kurvenintegral des Skalarfeldes $\rho(\vec{r})$ entlang d. Kurve $C=\{\vec{\mathrm{r}}(t)\,;a\leq t\leq b\}$:	$\int_C \rho\,ds=\int_a^b \rho(\vec{\mathrm{r}}(t))\|\vec{\mathrm{r}}'(t)\|\,dt$	Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{\mathrm{F}}(\vec{r})$ entl. d. Kurve C:	$\int_C \vec{F}\,d\vec{r}=\int_a^b \vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}}(t))\cdot\vec{\mathrm{r}}'(t)\,dt$
Kurvenintegral Gradientenfeld:	Wenn $\vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{r}}(t))=\nabla\phi(\vec{\mathrm{r}}(t))$, dann ist $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}=\phi(\vec{\mathrm{r}}(b))-\phi(\vec{\mathrm{r}}(a))$	Notw. Bed. in $\mathbb{R}^2$:	$\frac{\partial}{\partial y}F_x=\frac{\partial}{\partial x}F_y$
Komplanation y=y(x) (Drehung um x-Achse)	$O_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$	Komplanation $\vec{\mathrm{r}}(t)\in\mathbb{R}^2$ (Drehung um x-Achse)	$O_x=2\pi\int_{t_a}^{t_b} y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$
Volumen y=y(x) (Drehung um x- und y-Achse)	$V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx;\ V_y=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy=\pi\int_{x_1}^{x_2} x^2y'\,dx$	Volumen $\vec{\mathrm{r}}(t)\in\mathbb{R}^2$	$V_x=\pi\int_{t_a}^{t_b} y^2\dot{x}\,dt\,;V_y=\pi\int_{t_a}^{t_b} x^2\dot{y}\,dt$
Volumsintegral allg.:	$I=\int_{a_z}^{b_z}\int_{a_y}^{b_y}\int_{a_x}^{b_x}\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_{a_\vartheta}^{b_\vartheta}\int_{a_\varphi}^{b_\varphi}\int_{a_r}^{b_r} r^2\sin\vartheta\,\rho(r,\varphi,\vartheta)\,dr\,d\varphi\,d\vartheta=\int_{a_z}^{b_z}\int_{a_\varphi}^{b_\varphi}\int_{a_r}^{b_r} r^2\,\rho(r,\varphi,z)\,dr\,d\varphi\,dz$		
$I_{Kepler}=\frac{x_e-x_a}{6}(y_a+4y_m+y_e)$	$I_{Simpson}=\frac{x_e-x_a}{6n}[y_0+4(y_1+y_3+\cdots)+2(y_2+y_4+\cdots)+y_{2n}]$		
Ansatz bei doppelt komplexer NST eines Nenners $(x^2+px+q)^2$:	$\int\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^2}dx=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+C\int\frac{1}{x^2+px+q}dx\ \to$ *beide Seiten ableiten nach x*		