Geometrie und Gravitation

04.03.2022

Felder auf Mannigfaltigkeiten

Tangentialraum	• ∂_i zeigt dasselbe Trafo-Verh. wie Basisvektoren $E_i^a \Longrightarrow$ Diff.operatoren ∂_i^a bilden Vektorraum in p (Tangentialraum T_pM)! • Transformation von Tangentialvektoren v^k (Vektoren in T_pM) in ∂_i-Schreibweise: $\tilde v^i = v^k \partial_k \vert_{x_0^m} \tilde x^i$ $T_pM = \left\{ v^a = v^i \underbrace{\partial_i^a}_{Basis} \right\}$ mit $\partial_i^a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}\Big\vert_p$ („Raum aller Richtungsableitungen im Punkt p")
Vektorfeld	$v^a: M \to T_pM; p \mapsto v^a(p)$ in einer Karte: $v^a(p) = \underbrace{v^i(x^m)}_{Komponentenfunktion}\ \partial_i^a$ Trafo Komponenten: $\tilde v^i(\tilde x^m) = \frac{\partial \tilde x^j}{\partial x^i} v^i(x^m)$
Trafo Basisvektoren	$\boxed{\tilde\partial_i^a = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde x^i}\partial_k^a = \tilde\partial_i x^k \partial_k^a}$ (per Definition an der Stelle $\tilde x_0^m$ bzw. x_0^m; siehe vorige Seite)
Kotangentialraum	$T_pM^\sim$ bzw. $T_p^*M = \left\{ w_a = w_i \underbrace{dx_a^i}_{Kobasis}\right\}$ mit $\partial_i^a\, dx_a^j \stackrel{\text{def}}{=} \delta_i^j$ („Raum der linearen Funktionale, die jedem ∂_i^a eine Zahl zuordnen")
Kovektorfeld	$w_a: M \to T_pM^\sim; p \mapsto w_a(p)$ in einer Karte: $w_a(p) = w_i(x^m)\, dx_a^i$ Trafo duale Komponenten: $\tilde w_i(\tilde x^m) = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde x^i} w_i(x^m)$
Trafo Ko-Basis-Vektoren	„totales Differential" $\boxed{d\tilde x_a^i = \frac{\partial \tilde x^i}{\partial x^k} dx_a^k = \partial_k \tilde x^i\, dx_a^k}$ (per Definition an der Stelle $\tilde x_0^m$ bzw. x_0^m)
Tensorfeld	$t^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}: M \to \otimes_s^r T_pM;\ p \mapsto t^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}(p)$ in einer Karte: $t^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s}(p) = \underbrace{t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(x^m)}_{Komponentenfunktion}\ c$
Trafo Tensorfeld	$\tilde t^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s}(\tilde x^m) = \underbrace{\frac{\partial\tilde x^{i_1}}{\partial x^{k_1}}(x^m)\ldots\frac{\partial \tilde x^{i_r}}{\partial x^{k_r}}(x^m)}_{Trafo:\ r\ mal\ kontravariant} \cdot \underbrace{\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \tilde x^{j_1}}(x^m)\ldots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial\tilde x^{j_s}}(x^m)}_{Trafo:\ s\ mal\ kovariant}\ t^{k_1\ldots k_r}_{l_1\ldots l_s}(x^m)$

Koordinaten-kovariante Ableitungen ∂_a

Gradient eines Skalarfeldes $\mathcal{T}_0^0 \to \mathcal{T}_1^0$	Sei $F: M\to\mathbb{R};\ p\mapsto F(p)$ eine skalare Funktion auf der Mannigfaltigkeit M. Sei f die äquivalente Kartenfunktion f(x^k), die den Kartenkoordinaten $x^k(p)$ denselben skalaren Wert zuordnet wie F(p) Die Ableitung $\boxed{\partial_a \stackrel{\text{def}}{=} dx_a^i\,\partial_i}$: $C^\infty \to \mathcal{T}_1^0$(also $\mathcal{T}_0^0 \to \mathcal{T}_1^0$), angewandt auf F ist der Gradient des Skalarfeldes F. (1) ∂_a wird konkret in den Koordinaten einer bestimmten Kobasis berechnet: $\partial_a F = \overbrace{dx_a^i}^{Kobasis}\ \partial_i f \Longrightarrow$ ∂_i leitet die skalare Funktion f(x^k) nach x^i ab, und ordnet das Ergebnis dem jeweiligen i-ten Kobasisvektor dx_a^i zu. (2) Es ist egal, in welcher Karte (in welchen Koordinaten) der Gradient der skalaren Funktion gebildet wird; das Ergebnis (rücktransformiert auf die Mannigfaltigkeit) ist immer gleich (gilt nur für skalare Funktionen). $\boxed{\partial_a F = \tilde\partial_a F}$. Beweis: $dx_a^i\,\partial_i f \,\vert\, \partial_i = \partial_i \tilde x^k \tilde\partial_k \Longrightarrow \partial_a F = dx_a^i\,\partial_i\tilde x^k\tilde\partial_k\tilde f \stackrel{k\leftrightarrow i}{=} (\partial_k\tilde x^i\,dx_a^k)\tilde\partial_k \tilde f \,\vert\, \partial_k\tilde x^i\,dx_a^k = d\tilde x_a^i \Longrightarrow dx_a^i\,\partial_i f = d\tilde x_a^i\,\tilde\partial_i\tilde f$
Gradient eines Vektorfeldes $\mathcal{T}_0^1 \to \mathcal{T}_1^1$	$\partial_a v^b = \partial_a(v^i\partial_i^b) \stackrel{Leibniz}{=} (\partial_a v^i)\partial_i^b + v^i(\partial_a\partial_i^b) \,\vert\, \partial_a\partial_i^b = 0$, weil ∂_i^b Basisvektor $\Longrightarrow \boxed{\partial_a v^b = (\partial_a v^i)\partial_i^b}$
Differenzen-„tensor" (Christoffel-Symbol)	Es ist <u>nicht</u> egal, in welcher Karte (in welchen Koordinaten) die koordinaten-kovariante Ableitung eines Vektorfeldes gebildet wird; die Ergebnisse (rücktransformiert auf die Mannigfaltigkeit) sind <u>unterschiedlich</u>. $\partial_a v^b = \partial_a(\tilde v^j\tilde\partial_j^b) \stackrel{Leibniz}{=} \left(\partial_a\tilde v^j\right)\tilde\partial_j^b + \tilde v^j(\partial_a\tilde\partial_j^b) \,\vert\, \partial_a\tilde v^j = \tilde\partial_a\tilde v^j$, weil $\tilde v^j$ Skalar $\partial_a v^b = \tilde\partial_a\underline{\tilde v^j\tilde\partial_j^b} + \tilde v^j(\partial_a\tilde\partial_j^b) \,\vert\, \tilde v^j\tilde\partial_j^b = v^b \Longrightarrow \partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + \tilde v^j\left(\partial_a\underline{\tilde\partial_j^b}\right) \,\vert\, \tilde\partial_j^b = \tilde\partial_j x^k\partial_k^b$ $\partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + \tilde v^j\left(\underline{\partial_a(\tilde\partial_j x^k\partial_k^b)}\right) \stackrel{Leibniz}{=} \tilde\partial_a v^b + \tilde v^j\left(\partial_a(\tilde\partial_j x^k)\partial_k^b + \tilde\partial_j x^k\ \underline{\partial_a\partial_k^b}\right) \,\vert\, \partial_a\partial_k^b = 0$, weil ∂_k^b Basisvektor $\partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + \tilde v^j\underline{\partial_a(\tilde\partial_j x^k)}\partial_k^b \,\vert\, \partial_a(\tilde\partial_j x^k) = \tilde\partial_a(\tilde\partial_j x^k)$, weil $(\tilde\partial_j x^k)$ skalar $\partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + \tilde v^j\tilde\partial_a(\tilde\partial_j x^k)\underline{\partial_k^b} \,\vert\, \partial_k^b = \partial_k\tilde x^m\tilde\partial_m^b \Longrightarrow \partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + \tilde v^j\underline{\tilde\partial_a}(\tilde\partial_j x^k)\partial_k\tilde x^m\tilde\partial_m^b \,\vert\, \tilde\partial_a \stackrel{\text{def}}{=} d\tilde x_a^l\,\tilde\partial_l$ $\partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + \underline{\tilde v^j}\, d\tilde x_a^l\,\tilde\partial_l(\tilde\partial_j x^k)\partial_k\tilde x^m\tilde\partial_m^b \,\vert\, \tilde v^j = v^c\, d\tilde x_c^j$ (Dualbasis „erzeugt" Koord.) $\partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + v^c\cdot\underline{[d\tilde x_c^j\, d\tilde x_a^l\,\tilde\partial_m^b\cdot\tilde\partial_l(\tilde\partial_j x^k)\cdot\partial_k\tilde x^m]}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\Gamma^b{}_{ca} = \underbrace{\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial\tilde x^l\partial\tilde x^j}\frac{\partial\tilde x^m}{\partial x^k}\right)}_{2\ kovariante,\ 1\ kontravar.\ Wechsel}\underbrace{\tilde\partial_m^b\, d\tilde x_c^j\, d\tilde x_a^l}_{1x\ Basis\ 2x\ Kobasis}}$ $\boxed{\partial_a v^b = \tilde\partial_a v^b + \Gamma^b{}_{ca}v^c} \Longrightarrow (\partial_a - \tilde\partial_a)v^b = \Gamma^b{}_{ca}v^c \Longrightarrow \boxed{\partial_a - \tilde\partial_a = \Gamma^b{}_{ca}}$
	Das Kristoffelsymbol $\Gamma^b{}_{ca}$ ist kein Tensor, da es nicht wie ein Tensor transformiert.

Allgemeine kovariante Ableitungen ∇_a

Allgemeine kovariante Ableitungen	$\nabla_a: \mathcal{T}^p_q \to \mathcal{T}^p_{q+1}$. Jede kovariante Ableitung, die folgende Eigenschaften erfüllt (es gibt viele): Linearität: (i)a) $\nabla_a\left(t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} + s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) = \nabla_a t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} + \nabla_a s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}$ (i)b) $\nabla_a\left(\lambda t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) = \lambda\nabla_a t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}$ Leibniz: (ii) $\nabla_a\left(t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) = \left(\nabla_a t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right) s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q} + t^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\left(\nabla_a s^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_q}\right)$ Kompatibilität mit ∂_a bei skalaren Funktionen: (iii) $\nabla_a f = \partial_a f = \tilde{\partial}_a f; f \in C^\infty(M)$ Satz von Schwarz: (iv) $\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$ ∇_a ist vollständig bestimmt durch sein Wirkung auf Funktionen (koordinatenunabhängig) und Vektoren (koordinatenabhängig) *(Die allgemeine kovariante Ableitung beantwortet die Frage „wie ändert sich der Vektor in beliebiger Richtung in Bezug auf die gekrümmte Mannigfaltigkeit?". Sie liefert also eine Aussage über die Krümmung.)*
Diff.tensor $C^b{}_{ca}$	Differenzentensor $C^b{}_{ca}$: $\boxed{(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)v^b = C^b{}_{ca}v^c \Leftrightarrow \tilde{\nabla}_a v^b = \nabla_a v^b + C^b{}_{ca}v^c}$ Koordinatendarst.: $C^b{}_{ca} = dx^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_i$
$C^b{}_{ca}$ ist algebr. Derivation!	(i)b): $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(fv^b) \overset{(ii)}{=} (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)f \cdot v^b + f \cdot (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)v^b \,\vert\, (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)f \overset{(iii)}{=} 0 \Longrightarrow \boxed{(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(fv^b) = f(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)v^b}$ ✓
Basisunabhängigkeit von $C^b{}_{ca}$	$\boxed{C^b{}_{ca} = \tilde{C}^b{}_{ca}}$ Bew.: $C^b{}_{ca} = dx^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_i$ ... (1); $\tilde{C}^b{}_{ca} = d\tilde{x}^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\tilde{\partial}^b_i = d\tilde{x}^i_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\tilde{\partial}_i x^j \partial^b_j) \,\vert\, \tilde{\partial}_i x^j$ ist skalare Fkt. $\tilde{C}^b{}_{ca} = d\tilde{x}^i_c \tilde{\partial}_i x^j (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_j = dx^j_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\partial^b_j \overset{(1)}{=} C^b{}_{ca}$ ■
Wirkung auf Kovektor	Sei $w_m: M \to T_pM^\sim$ ein Kovektor. Dann gilt: $\boxed{(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m = -C^c{}_{ma}w_c \Leftrightarrow \tilde{\nabla}_a w_m = \nabla_a w_m - C^c{}_{ma}w_c}$ $w_c v^c \in C^\infty \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w_c v^c) = 0 \xRightarrow{Leibniz} (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_c v^c + w_c(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)v^c = 0 \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m v^m + w_c C^c{}_{ma} v^m = 0$ $\Longrightarrow \left[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m + w_c C^c{}_{ma}\right]v^m = 0 \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m + w_c C^c{}_{ma} = 0 \Longrightarrow (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_m = -w_c C^c{}_{ma}$ ■
Symmetrie von $C^b{}_{ca}$	$\boxed{C^b{}_{ca} = C^b{}_{ac}}$ Bew.: $\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b f \overset{(iii)}{=} \tilde{\nabla}_a(\nabla_b f) \overset{s.o.}{=} \nabla_a\nabla_b f - C^m{}_{ba}\nabla_m f$ ... (1) $\tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a f \overset{analog}{=} \nabla_b\nabla_a f - C^m{}_{ab}\nabla_m f \overset{(iv)}{=} \nabla_a\nabla_b f - C^m{}_{ab}\nabla_m f$ ... (2) $\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_b f - \tilde{\nabla}_b\tilde{\nabla}_a f = 0 \overset{(1,2)}{=} -C^m{}_{ba}\nabla_m f + C^m{}_{ab}\nabla_m f \Longrightarrow -C^m{}_{ba} + C^m{}_{ab} = 0 \Longrightarrow C^m{}_{ab} = C^m{}_{ba}$ ■
Krümmungstensor a.k.a Riemanntensor (Wirkung von $[\nabla_a, \nabla_b]$ auf Vektor v^c)	$\boxed{[\nabla_a, \nabla_b]v^c = R^c{}_{dab}v^d}$ mit $[\nabla_a, \nabla_b] \overset{\text{def}}{=} \nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a$ Koordinatendarstellung: $R^c{}_{dab} \overset{\text{def}}{=} dx^j_d[\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j$ Bew.: $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = [\nabla_a, \nabla_b](v^j\partial^c_j) \overset{Leibniz}{=} ([\nabla_a, \nabla_b]v^j)\partial^c_j + v^j[\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j$ $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = \left((\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)v^j\right)\partial^c_j + v^j[\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j = (\nabla_a\nabla_b v^j - \nabla_b\nabla_a v^j)\partial^c_j + v^j[\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j \xRightarrow{(iv)}$ $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = (\nabla_a\nabla_b v^j - \nabla_a\nabla_b v^j)\partial^c_j + v^j[\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j = v^j[\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j \,\vert\, v^j = v^d\, dx^j_d \Longrightarrow$ $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = v^d dx^j_d[\nabla_a, \nabla_b]\partial^c_j = R^c{}_{dab}v^d$ ■
Antisymmetrie	$[\nabla_a, \nabla_b]v^c = Rv^d = -[\nabla_b, \nabla_a]v^c = -R^c{}_{dba} \Longrightarrow \boxed{R^c{}_{dab}v^d = -R^c{}_{dba}v^d}$
Eigenschaften	$\boxed{R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab}}$

Algebraische Derivationen

Algebra	Eine Algebra $(A,\cdot)$ ist ein Vektorraum A mit einer bilinearen Abbildung (Produkt) - hier symbolisiert durch den Punkt $\cdot : A \times A \to A$. *Beispiel:* $\mathbb{R}^3$ *als Vektorraum mit dem Kreuzprodukt ist eine Algebra.*
Derivation	Eine Derivation ist eine lineare Abbildung $A \to A$, die die Leibnitzregel befolgt: $\mathrm{D}(a \cdot b) = Da \cdot b + a \cdot \mathrm{D}b$ mit $a, b \in (A,\cdot)$. Der Raum der Derivationen ist ein Unterraum aller linearen Abbildungen: $\mathrm{Der}(A, A) \subseteq \mathrm{L}(A, A)$.
Derivation ist ein Vektorraum	Beweise: $\mathrm{Der}(A, A)$ ist ein Unterraum von $\mathrm{L}(A, A)$, und daher ist auch $\mathrm{Der}(A, A)$ ein (abgeschlossener) Vektorraum : $\Longrightarrow$ z.Z: wenn $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2 \in \mathrm{Der}(A, A)$, dann ist auch $(\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2) \in \mathrm{Der}(A, A)$, d.h. dann ist auch $(\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2)$ linear • $(D_1 + D_2)(a \cdot b) \overset{Lin.}{=} D_1(a \cdot b) + D_2(a \cdot b) \overset{Leibnitz}{=} (D_1a) \cdot b + a \cdot D_1b + (D_2a) \cdot b + a \cdot D_2b \overset{bil.}{=}$ • $(D_1a + D_2a) \cdot b + a \cdot (D_1b + D_2b) = a \cdot (D_1 + D_2)\, a \cdot b + a \cdot (D_1 + D_2)b$ ■ $\Longrightarrow$ Damit ist $\mathrm{Der}(A, A)$ ein Unterraum von $\mathrm{L}(A, A)$ und somit ein Vektorraum
Derivation ist eine Algebra mit dem Kommutator als Produkt	Mit dem Kommutator $[D_1, D_2]$ als Produkt ist $\mathrm{Der}(A)$ eine Algebra: $\boxed{(\mathrm{Der}(A), [\cdot,\cdot]) \text{ ist eine Algebra.}}$ Bew.: Zu zeigen ist $[.,.]: \mathrm{Der}(A) \times \mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}(A) \Leftrightarrow [D_1, D_2](a \cdot b)$ erfüllt die Leibnitz-Regel. $D_1D_2(a \cdot b) \overset{Leibnitz}{=} D_1(D_2a \cdot b + a \cdot D_2b) \overset{Lin.}{=} D_1(D_2a \cdot b) + D_1(a \cdot D_2b) \xRightarrow{Leibnitz}$ $D_1D_2(a \cdot b) = D_1D_2a \cdot b + D_2a \cdot D_1b + D_1a \cdot D_2b + a \cdot D_1D_2b$ ... (1) $\Longrightarrow$ $D_2D_1(a \cdot b) = D_2D_1a \cdot b + D_1a \cdot D_2b + D_2a \cdot D_1b + a \cdot D_2D_1b$ ... (2) $[D_1, D_2](a \cdot b) = D_1D_2(a \cdot b) - D_2D_1(a \cdot b) \xRightarrow{(1),(2)}$ $[D_1, D_2](a \cdot b) = (D_1D_2a \cdot b + D_2a \cdot D_1b + D_1a \cdot D_2b + a \cdot D_1D_2b) - (D_2D_1a \cdot b + D_1a \cdot D_2b + D_2a \cdot D_1b + a \cdot D_2D_1b)$ $[D_1, D_2](a \cdot b) = (D_1D_2a \cdot b - D_2D_1a \cdot b) + (a \cdot D_1D_2b - a \cdot D_2D_1b) + (\cancel{D_1a \cdot D_2b - D_1a \cdot D_2b}) + (\cancel{D_2a \cdot D_1b - D_2a \cdot D_1b})$ $[D_1, D_2](a \cdot b) = [D_1, D_2]a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2]b$ ■
Innere Derivation	Eine Derivation $\mathcal{D} \in \mathrm{Der}(\mathrm{Der}(A))$ („sozusagen eine Derivation zweiter Ebene"), die auf eine Derivation $D \in \mathrm{Der}(A)$ wirkt, so dass $\mathcal{D}$: $\mathrm{Der}(A) \to \mathrm{Der}(A)$, heißt „innere Derivation". Weil das Produkt der „normalen" Derivationen $D \in \mathrm{Der}(A)$ der Kommutator ist (siehe oben), definieren wir $D_1 * D_2 \overset{\text{def}}{=} [D_1, D_2]$. Es muss für eine innere Derivation $\mathcal{D}$ genauso die Leibnitzregel gelten: $\mathcal{D}(D_1 * D_2) = \mathcal{D}(D_1) * D_2 + D_1 * \mathcal{D}(D_2)$. Dies ist erfüllt, wenn $\mathcal{D}(D_1) \overset{\text{def}}{=} [D, D_1]$.
Leibnitzregel = Jacobi-Identität	Die Leibnitzregel $\mathcal{D}(D_1 * D_2) = \mathcal{D}(D_1) * D_2 + D_1 * \mathcal{D}(D_2)$ kann daher wegen $D_1 * D_2 \overset{\text{def}}{=} [D_1, D_2]$ geschrieben werden als $\big[\mathcal{D}, [D_1, D_2]\big] = [\mathcal{D}, D_2] + \big[D_1, [\mathcal{D}, D_2]\big]$, bzw. mit der Substitution $\mathcal{D} \to D_1;\ D_1 \to D_2;\ D_2 \to D_3$ als $\big[D_1, [D_2, D_3]\big] = \big[[D_1, D_2], D_3\big] + \big[D_2, [D_1, D_3]\big]$, was als Jacobi-Identität bekannt ist
Bianci-Identität	Im Fall von $D = \nabla_a$ lautet die Leibnitzregel $\big[\nabla_a, [\nabla_b, \nabla_c]\big] = \big[[\nabla_a, \nabla_b], \nabla_c\big] + \big[\nabla_b, [\nabla_a, \nabla_c]\big]$, was als Bianci-Identität bekannt ist

Darstellung der Bianci-Identitäten mit Riemanntensor

<table>
<tr><td>Wirkung von $[\nabla_a,\nabla_b]$ auf Kovektor w_c)</td><td>$w_c v^c$ ist skalare Funktion $\Longrightarrow [\nabla_a,\nabla_b](w_d v^d) \overset{(iv)}{=} 0 \xrightarrow{Leibnitz} [\nabla_a,\nabla_b]w_d v^d + w_c[\nabla_a,\nabla_b]v^c = 0 \,|\, [\nabla_a,\nabla_b]v^c = R^c{}_{dab}v^d$
$[\nabla_a,\nabla_b]w_d v^d + w_c R^c{}_{dab}v^d = 0 \Longrightarrow \boxed{[\nabla_a,\nabla_b]w_d v^d = -R^c{}_{dab}w_c v^d} \,\Big|\, \frac{1}{v^d} \overset{c\leftrightarrow d}{\Longrightarrow} \boxed{[\nabla_a,\nabla_b]w_c = -R^d{}_{cab}w_d;\ [\nabla_a,\nabla_b]\nabla_c = -R^d{}_{cab}\nabla_d}$</td></tr>
<tr><td>Wirkung von $[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]$ auf Funktionen → 1. Bianci-Identität in $R^d{}_{abc}$</td><td>$[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]f = [[\nabla_a,\nabla_b],\nabla_c]f + [\nabla_b,[\nabla_a,\nabla_c]]f \Longrightarrow$
$\nabla_a \underbrace{[\nabla_b,\nabla_c]f}_{=0} - [\nabla_b,\nabla_c]\nabla_a f = [\nabla_a,\nabla_b]\nabla_c f - \nabla_c \underbrace{[\nabla_a,\nabla_b]f}_{=0} + \nabla_b \underbrace{[\nabla_a,\nabla_c]f}_{=0} - [\nabla_a,\nabla_c]\nabla_b f \Longrightarrow$
$-[\nabla_b,\nabla_c]\nabla_a f = [\nabla_a,\nabla_b]\nabla_c f - [\nabla_a,\nabla_c]\nabla_b f \,|\, \nabla_a f \overset{\text{def}}{\equiv} w_a \Longrightarrow -[\nabla_b,\nabla_c]w_a = [\nabla_a,\nabla_b]w_c - [\nabla_a,\nabla_c]w_b \,|\, [\nabla_a,\nabla_b]w_c = -R^d{}_{cab}w_d$
$-R^d{}_{abc}w_d = R^d{}_{cab}w_d - R^d{}_{bac}w_d \,|: w_d \Longrightarrow -R^d{}_{abc} = R^d{}_{cab} - R^d{}_{bac} \Longrightarrow R^d{}_{abc} + R^d{}_{cab} - R^d{}_{bac} = 0 \,|\, -R^d{}_{bac} = +R^d{}_{bca}$
$\boxed{R^d{}_{abc} + R^d{}_{cab} + R^d{}_{bca} = 0}$ … 1. Bianci-Identität</td></tr>
<tr><td>Wirkung von $[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]$ auf Vektoren → Zweite Bianci-Identität in $\nabla_a R^d{}_{mbc}$</td><td>$[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]v^d = [[\nabla_a,\nabla_b],\nabla_c]v^d + [\nabla_b,[\nabla_a,\nabla_c]]v^d \Longrightarrow$
$[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]v^d = -[\nabla_c,[\nabla_a,\nabla_b]]v^d + [\nabla_b,[\nabla_a,\nabla_c]]v^d \ldots (1)$
$[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]v^d = \underbrace{\underbrace{\nabla_a([\nabla_b,\nabla_c]v^d)}_{\nabla_a(R^d{}_{mbc}v^m)}}_{(\nabla_a R^d{}_{mbc})v^m + R^d{}_{mbc}(\nabla_a v^m)} - \underbrace{\underbrace{[\nabla_b,\nabla_c]\underbrace{(\nabla_a v^d)}_{T^d_a}}_{-R^m{}_{abc}T^d_m + R^d{}_{mbc}T^m_a}}_{+R^m{}_{abc}\nabla_m v^d - R^d{}_{mbc}\nabla_a v^m}$
$[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]v^d = \nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + \cancel{R^d{}_{mbc}\nabla_a v^m} + R^m{}_{abc}\nabla_m v^d - \cancel{R^d{}_{mbc}\nabla_a v^m}$
$[\nabla_a,[\nabla_b,\nabla_c]]v^d = \nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + R^m{}_{abc}\nabla_m v^d \ldots (2a)\ a \to c;\ b \to a;\ c \to b \Longrightarrow$
$[\nabla_c,[\nabla_a,\nabla_b]]v^d = \nabla_c R^d{}_{mab}v^m + R^m{}_{cab}\nabla_m v^d \ldots (2b)\ c \leftrightarrow b \Longrightarrow$
$[\nabla_b,[\nabla_a,\nabla_c]]v^d = \nabla_b R^d{}_{mac}v^m + R^m{}_{bac}\nabla_m v^d \ldots (2c)$
$(2abc)$ in $(1) \Longrightarrow \nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + R^m{}_{abc}\nabla_m v^d = -\nabla_c R^d{}_{mab}v^m - R^m{}_{cab}\nabla_m v^d + \nabla_b R^d{}_{mac}v^m + R^m{}_{bac}\nabla_m v^d$
$\nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + R^m{}_{abc}\nabla_m v^d + R^m{}_{cab}\nabla_m v^d - R^m{}_{bac}\nabla_m v^d = -\nabla_c R^d{}_{mab}v^m + \nabla_b R^d{}_{mac}v^m$
$\nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + R^m{}_{abc}\nabla_m v^d + R^m{}_{cab}\nabla_m v^d + R^m{}_{bca}\nabla_m v^d = -\nabla_c R^d{}_{mab}v^m + \nabla_b R^d{}_{mac}v^m$
$\nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + \underbrace{(R^m{}_{abc} + R^m{}_{cab} + R^m{}_{bca})}_{=0\ (Bianci\ 1)}\nabla_m v^d = -\nabla_c R^d{}_{mab}v^m + \nabla_b R^d{}_{mac}v^m$
$\nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + \nabla_c R^d{}_{mab}v^m - \nabla_b R^d{}_{mac}v^m = 0 \,|\, -R^d{}_{mac} = +R^d{}_{mca}$
$\boxed{\nabla_a R^d{}_{mbc}v^m + \nabla_c R^d{}_{mab}v^m + \nabla_b R^d{}_{mca}v^m = 0}$ … 2. Bianci-Identität. Achtung: $\nabla_a R^d{}_{mbc}v^m \equiv (\nabla_a R^d{}_{mbc})v^m$</td></tr>
</table>

Parallelität und Parallelverschiebung

<table>
<tr><td>Parallelität des Vektorfeldes v^b entlang einer Kurve γ</td><td>Gegeben sei eine Kurve $\gamma: x^m(t)$ und ein Vektorfeld $v^i(x^m)$.
Vektoren des Vektorfeldes entlang der Kurve γ werden daher beschrieben durch $v^i(x^m(t))$
Tangentialvektoren an die Kurve werden beschrieben durch $u^i(t) = \dot{x}^i(t)$.
Die Änderung von $v^i(x^m(t))$ in Bezug auf t ist der Vektorgradient $\frac{d}{dt}v^i(x^m(t))$:
$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(\vec{x}(t)) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{x}}(\vec{x})\cdot\dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{D\vec{v}(\vec{x})}_{Fréchet-Ableitung}\cdot\dot{\vec{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial v^1}{\partial x^1} & \frac{\partial v^1}{\partial x^2} & \frac{\partial v^1}{\partial x^3}\\ \frac{\partial v^2}{\partial x^1} & \frac{\partial v^2}{\partial x^2} & \frac{\partial v^2}{\partial x^3}\\ \frac{\partial v^3}{\partial x^1} & \frac{\partial v^3}{\partial x^2} & \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}^{ij}}_{\partial_j v^i(x^m(t))}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}\dot{x}^1(t)\\ \dot{x}^2(t)\\ \dot{x}^3(t)\end{pmatrix}^{j}}_{\dot{x}^j(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial v^1}{\partial x^1}\dot{x}^1(t) + \frac{\partial v^1}{\partial x^2}\dot{x}^2(t) + \frac{\partial v^1}{\partial x^3}\dot{x}^3(t)\\ \frac{\partial v^2}{\partial x^1}\dot{x}^1(t) + \frac{\partial v^2}{\partial x^2}\dot{x}^2(t) + \frac{\partial v^2}{\partial x^3}\dot{x}^3(t)\\ \frac{\partial v^3}{\partial x^1}\dot{x}^1(t) + \frac{\partial v^3}{\partial x^2}\dot{x}^2(t) + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\dot{x}^3(t)\end{pmatrix}^{ij}}_{\partial_j v^i(x^m(t))\,\dot{x}^j(t)} \Longrightarrow$
$\frac{d}{dt}v^i(x^m(t)) = \partial_j v^i(x^m(t))\,\dot{x}^j(t) \,\big|\, \dot{x}^j(t) \overset{\text{def}}{\equiv} u^j(t) \Longrightarrow \frac{d}{dt}v^i(x^m(t)) = \partial_j v^i(x^m(t))\,u^j(t) = (u^j\partial_j)\,v^i(x^m(t)) \xrightarrow{mit\ Basis\ \partial^a_i}$
$\frac{d}{dt}(v^i\partial^a_i) = u^j\partial_j(v^i\partial^a_i) = u^i\delta^j_i\partial_j(v^i\partial^a_i) \,|\, \delta^j_i = \partial^b_i\,dx^j_b \Longrightarrow \frac{d}{dt}(v^i\partial^a_i) = u^i\partial^b_i\,dx^j_b\,\partial_j(v^i\partial^a_i) = u^b\partial_b(v^i\partial^a_i)$ Abkürzung
$\frac{d}{dt}(v^i\partial^a_i) = u^b(\partial_b v^i\partial^a_i + v^i\partial_b\partial^a_i) \,\big|\, \partial_b\partial^a_i = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}(v^i\partial^a_i) = u^b\partial_b v^i\partial^a_i = u^b\partial_b v^a$
Vektorfeld v^b parallel zur Kurve $\gamma \Leftrightarrow u^a\partial_a v^b|_\gamma = 0$ … Koordinatenabh. mit kovarianter Ableitung, die zu Koord.system gehört
Daher koordinatenunabhängige Verallgemeinerung: Ersetze $\partial_a \to \nabla_a \Longrightarrow$ $\boxed{\text{Vektorfeld } v^b \text{ parallel zur Kurve } \gamma \Leftrightarrow u^a\nabla_a v^b|_\gamma \overset{!}{=} 0}$
(Bedeutung von $\boxed{u^a\nabla_a v^b|_\gamma \overset{!}{=} 0}$: *„Änderung des Vektorfeldes v auf Kurve γ in Richtung der Kurventangente u gleich Null“*)</td></tr>
<tr><td>Parallelverschiebung</td><td>Wir wollen nun ein Vektorfeld konstruieren, dass diese Parallelitätsbedingung erfüllt.
$0 \overset{!}{=} u^a\nabla_a v^b = u^a\partial_a v^b + u^a(\partial_a - \tilde{\partial}_a)v^b = u^a\partial_a v^b + u^a\Gamma^b{}_{ca}v^c = (u^i\partial^a_i)\partial_a(v^j\partial^b_j) + u^a(\partial^b_j\Gamma^j{}_{kl}\,dx^k_c\,dx^l_a)v^c$
$0 \overset{!}{=} u^i(\partial^a_i\partial_a)v^j\partial^b_j + \Gamma^j{}_{kl}\,(v^c dx^k_c)(u^a dx^l_a)\,\partial^b_j = u^i\partial_i v^j\partial^b_j + \Gamma^j{}_{kl}\,v^k u^l\,\partial^b_j = (\dot{x}^i\partial_i v^j + \Gamma^j{}_{kl}\,v^k\dot{x}^l)\partial^b_j = \dot{x}^i\partial_i v^j + \Gamma^j{}_{kl}\,v^k\dot{x}^l$
$\frac{dx^i}{dt}\frac{dv^j}{dx^i} + \Gamma^j{}_{kl}\dot{x}^l\,v^k = \boxed{\dot{v}^j + \Gamma^j{}_{kl}\dot{x}^l\,v^k \overset{!}{=} 0} \Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}v^j(t) + \hat{H}^j{}_k(t)\,v^k(t) = 0 \text{ mit } \hat{H}^j{}_k(t) = \Gamma^j{}_{kl}\,\dot{x}^l(t) \text{ und } \Gamma^j{}_{kl} = \Gamma^j(x^m(t))_{kl}}$
Entspricht Schrödingergleichung $\Longrightarrow$ Zeitenwicklungsoperator $\hat{U}(t)$: $v^i(t) = \hat{U}^i{}_j(t)\,v^j(0)$
$\dot{v}^j + \hat{H}^j{}_k v^k = 0 \,\big|\, v^k = \hat{U}^k{}_m\,v^m(0);\ \dot{v}^j = \dot{\hat{U}}^j{}_m\,v^m(0) \Longrightarrow \dot{\hat{U}}^j{}_m\,v^m(0) + \hat{H}^j{}_k\hat{U}^k{}_m\,v^m(0) = 0 \,\big|: v^m(0) \Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\hat{U}^j{}_m + \hat{H}^j{}_k\hat{U}^k{}_m = 0}$</td></tr>
<tr><td>Autoparallele Kurven</td><td>Eine Kurve γ ist autoparallel, wenn ihr Tangentenvektor u^i entlang der Kurve γ zu sich selbst parallel bleibt; d.h.:
$\dot{v}^j + \Gamma^j{}_{kl}\dot{x}^l\,v^k = 0 \,\big|\, v^k = u^k = \dot{x}^k;\ \dot{v}^j = \dot{u}^k = \ddot{x}^k \Longrightarrow \ddot{x}^j + \Gamma^j{}_{kl}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^l = 0$
Problem: Welche Ableitung ∇_a mit zugehörigem $\Gamma^j{}_{kl}$ ist die „richtige“? $\Longrightarrow$ Abstandsbegriff (Metrik) wird benötigt!</td></tr>
<tr><td>Metrischer Tensor g_{ab}</td><td>Eigenschaften: (i) symmetrisch: $g_{ab} \in \mathcal{T}_2: g_{ab} = g_{ba}$ (ii) invertierbar: $\exists g^{ab} \in \mathcal{T}^2: g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$
(iii) invertierter Metriktensor ist ebenfalls symmetrisch: $g^{ab} = g^{ba}$
Mit der Metrik kann man „Indexziehen“: $v^b \in \mathcal{T}^1 \to v_a \in \mathcal{T}_1: v_a = g_{ab}v^b;\ w_a \in \mathcal{T}_1 \to w^b \in \mathcal{T}^1: w^b = g^{ba}w_a$
In Koordinatenbasis des Punkts $g_{\mu\nu}(x^j) = g_{ab}\partial^a_\mu\partial^b_\nu;\ \mu,\nu = 0,1,2,3,4$
In jedem Punkt $\exists$ Basis $E^a_\alpha E^b_\beta$, so dass $g_{ab}E^a_\alpha E^b_\beta = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ (Die Komponenten $\eta_{\alpha\beta}$ sind die „Minkowski-Metrik“)</td></tr>
</table>

Wahl der Parallelverschiebung („welches ∇_c?") $\Longrightarrow$ Levi-Civita-Ableitung	Forderung: Wenn ich zwei Vektoren v^a, w^a entlang einer Kurve γ parallel verschiebe, soll sich das innere Produkt $g_{ab}v^a w^b$ zwischen den Vektoren (i.e. der Winkel zwischen den Vektoren) nicht ändern. D.h.: Der Gradient des inneren Produkts $g_{ab}v^a w^b$ in Richtung der Kurventangente $(u^c\nabla_c)u^b$ soll Null sein. $\Longrightarrow$ $0 \overset{!}{=} u^c\nabla_c(g_{ab}v^a w^b) \overset{Leibniz}{=} u^c(\nabla_c g_{ab})v^a w^b + u^c g_{ab}(\nabla_c v^a)w^b + u^c g_{ab}v^a(\nabla_c w^b)$ $0 \overset{!}{=} u^c(\nabla_c g_{ab})v^a w^b + u^c\nabla_c v^a \cdot w^b g_{ab} + u^c\nabla_c w^b \cdot v^a g_{ab} \Big\vert\ v, w$ parallelverschoben $\Longrightarrow u^c\nabla_c v^a = 0,\ u^c\nabla_c w^b = 0$ $0 \overset{!}{=} u^c(\nabla_c g_{ab})v^a w^b\ \forall u, v, w$ $\Longrightarrow$ Wähle ∇_c, so dass $\boxed{\nabla_c g_{ab} = 0}$ „Levi-Civita-Ableitung" mit kovariante Konstanz der Metrik
Einzigartigkeit der Levi-Civita-Ableitung	Sei $\tilde\nabla_a$ eine beliebige kovariante Ableitung und ∇_a die Levi-Civita-Ableitung, so dass $\nabla_a g_{bc} = 0$. Dann gilt: $\nabla_a g_{bc} = \tilde\nabla_a g_{bc} - C^m{}_{ba}g_{mc} - C^m{}_{ca}g_{bm} = 0 \Longrightarrow \tilde\nabla_a g_{bc} = C^m{}_{ba}g_{mc} + C^m{}_{ca}g_{bm} \Longrightarrow \tilde\nabla_a g_{bc} = C_{cba} + C_{bca}$ ... (1) $a \to b; b \to c; c \to a \Longrightarrow \tilde\nabla_b g_{ca} = C_{acb} + C_{cab}$ ... (2) $\vert\ a \to b; b \to c; c \to a \Longrightarrow \tilde\nabla_c g_{ab} = C_{bac} + C_{abc}$ ... (3) $(1) + (2) - (3) \Longrightarrow \tilde\nabla_a g_{bc} + \tilde\nabla_b g_{ca} - \tilde\nabla_c g_{ab} = C_{cba} + C_{bca} + C_{acb} + C_{cab} - C_{bac} - C_{abc} \vert C_{xyz} = C_{xzy}$ $\tilde\nabla_a g_{bc} + \tilde\nabla_b g_{ca} - \tilde\nabla_c g_{ab} = C_{cab} + \cancel{C_{bca}} + \cancel{C_{acb}} + C_{cab} - \cancel{C_{bca}} - \cancel{C_{acb}} \Longrightarrow 2C_{cab} = \tilde\nabla_a g_{bc} + \tilde\nabla_b g_{ca} - \tilde\nabla_c g_{ab} \Big\vert \cdot g^{dc}$ $2C^d{}_{ab} = g^{dc}(\tilde\nabla_a g_{bc} + \tilde\nabla_b g_{ca} - \tilde\nabla_c g_{ab}) \Longrightarrow \boxed{C^d{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{dc}(\tilde\nabla_a g_{bc} + \tilde\nabla_b g_{ca} - \tilde\nabla_c g_{ab})}$ ... (4) Ann.: $\tilde\nabla_a$ wäre auch Levi-Civita$\Longrightarrow \tilde\nabla_a g_{bc} = \tilde\nabla_b g_{ca} = \tilde\nabla_c g_{ab} = 0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} C^d{}_{ab} = C^a{}_{bc} = 0 \Longrightarrow \nabla_a g_{bc} = \tilde\nabla_a g_{bc} \Longrightarrow \nabla_a = \tilde\nabla_a \Longrightarrow$ $\boxed{\text{Es gibt nur eine kovariante Levi-Civita-Ableitung } \nabla_a \text{, so dass } \nabla_a g_{bc} = 0}$

Stromlinie und Flussabbildung

Integralkurve	Sei $\xi^a = \xi^i(x^m)\,\partial_i^a$ ein Vektorfeld und γ eine Kurve mit der parametrisierten Darstellung $x^m(t)$. Hat die Kurve γ die Eigenschaft, dass ihr Tangentenvektor $\dot x^a = \dot x^i(t)\,\partial_i^a$ in jedem Kurvenpunkt mit dem Vektorfeld übereinstimmt, nennt man sie Integralkurve: $\boxed{\dot x^i(t) = \xi^i(x^m(t))}$. Bei gegebenen Anfangsbedingungen ist die Integralkurve in der Umgebung des Anfangspunktes eindeutig.
Flussabbildung	Bei gegebenem Vektorfeld $\xi^a = \xi^i(x^m)\,\partial_i^a$ gibt es also in jedem gewählten Anfangspunkt $x^i(0) \overset{\text{def}}{=} x_0^i$ genau eine Integralkurve $\dot x^i(t) = \xi^i(x^m(t))$, über die dieser Punkt in den Punkt $x^i(t)$ "transportiert" (abgebildet) wird. Die Gesamtheit aller Integralkurven durch die Punkte eines Bereichs erzeugen daher eine Flussabbildung $\boxed{\phi_t(p): p \mapsto \phi_t(p)\,;\, x^i \mapsto \phi_t^i(x^k) = x^i(t)}$ wobei $x^i(0) = x^i$ („Anfangswert"). Es gilt (innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung ε): $\phi_t + \phi_s = \phi_{t+s} \Leftrightarrow \phi_t^i(\phi_s^k(x^m)) = \phi_{t+s}^i(x^m)$ Beispiel: Radiales Vektorfeld $\boxed{\xi^i(x^m(t)) = \dot x^i(t) \overset{\text{def}}{=} x^i(t)}$ $\Longrightarrow \dot x^i - x^i = 0$; char. Polynom der DGL: $\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow$ Ansatz $x^i(t) = C^i e^{\lambda t} = C^i e^t \vert\, x^i(0) = C^i e^0 \overset{\text{def}}{=} x_0^i \Longrightarrow C^i = x_0^i \Longrightarrow x^i(t) = x_0^i e^t \Longrightarrow \phi_t^i(x_0^m) = x_0^i e^t \Longrightarrow \boxed{\phi_t^i(x^m) = x^m e^t}$

Lie-Ableitung

Lie-Ableitung eines Skalarfeldes („Strömungsableitung")	Sei $\xi^a = \xi^i(x^m)\,\partial_i^a$ ein Vektorfeld und ϕ_t die zugehörige Flussabbildung. Weiters sei $f(x^m)$ ein Skalarfeld. Dann ist $\tilde f_t(x^m) \overset{\text{def}}{=} f(\phi_t^i(x^m))$ ... (1) die um t transportierte Funktion. Dann lautet die Reihenentwicklung um $t = 0$: $\tilde f_t(x^m) = f(x^m) + tL_\xi f(x^m) + O(t^2)$, wobei L_ξ die Lie-Ableitung darstellt. Somit: $L_\xi f(x^m) = \frac{d}{dt}\tilde f(x^m)\Big\vert_{t=0}$ $L_\xi f(x^m) = \frac{d}{dt}\tilde f(x^m)\Big\vert_{t=0} \overset{(1)}{=} \frac{d}{dt}f(\phi_t^i(x^m))\Big\vert_{t=0} = \partial_k f(x^m)\underbrace{\frac{d}{dt}\phi_t^i(x^m)\Big\vert_{t=0}}_{x(t)\vert_{t=0}} = \partial_k f(x^m)\underbrace{\dot x(t)\vert_{t=0}}_{\xi^k(x^m)} \Longrightarrow \boxed{L_\xi f(x^m) = \xi^k(x^m)\,\partial_k f(x^m)}$ Die Lie-Ableitung $L_\xi f(x^m)$ liefert also die Information darüber, wie sich die skalare Funktion f ein infinitesimales Stück dt „in Strömungsrichtung" des Vektorfeldes ξ^a verändert.
Lie-Ableitung eines Vektorfeldes	Sei $\xi^a = \xi^i(x^m)\,\partial_i^a$ das Vektorfeld der Transportströmung und ϕ_t die zugehörige Flussabbildung. Weiters sei η^a das zu transportierende Vektorfeld und $\psi_s^l(x^m)$ die Flussabbildung des zu transportierenden Vektorfeldes, so dass $\boxed{\eta^l(x^m) = \frac{\partial}{\partial s}\psi_s^l(x^m)\Big\vert_{s=0}}$ ... (1) Wir definieren nun $\boxed{\tilde\psi_s^l(x^m) \overset{\text{def}}{=} \phi_{-t}^l(\psi_s^i(\phi_t^k(x^m)))}$ ... (2) Anschaulich: Der Punkt x^m wird mit ϕ_t^k ein Stück t entlang der Transportströmung verschoben *(z.B. „nach rechts")*, von dem neuen Punkt dann mit ψ_s^i ein Stück s entlang des zugehörigen Integrallinie des zu transportierenden Vektorfeldes *(z.B. „nach oben")*, und dann mit $-t$ wieder zurück *(z.B. wieder „nach links")*. Der „Rücktransport" ϕ_{-t}^k gewährleistet, dass $\tilde\psi_0^l(x^m) = x^l$. Wir definieren: $\tilde\eta^l(x^m) = \frac{\partial}{\partial s}\tilde\psi_s^l(x^m)\Big\vert_{s=0} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \tilde\eta^l(x^m) = \frac{\partial}{\partial s}\phi_{-t}^l(\psi_s^i(\phi_t^k(x^m)))\Big\vert_{s=0} = \partial_p\,\phi_{-t}^l(\psi_s^k(\phi_t^i(x^m))) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\psi_s^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{s=0} \overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\tilde\eta^l(x^m) = \partial_p\,\phi_{-t}^l\Big(\underbrace{\underbrace{\psi_0^k}_{Id}(\phi_t^i(x^m))}_{\phi_t^k(x^m)}\Big) \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j)) \Longrightarrow \boxed{\tilde\eta^l(x^m) = \partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j))}$ ... (3) Anschaulich ist $\tilde\eta^l$ das unter der Strömung ϕ_t veränderte Vektorfeld η^l. Damit definiert sich die Lie-Ableitung L_ξ zur Transportströmung ξ wie folgt: $L_\xi\,\eta^l(x^m) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde\eta^l(x^m)\Big\vert_{t=0} \overset{(3)}{\Longrightarrow}$ $L_\xi\,\eta^l(x^m) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j))\right]\Big\vert_{t=0}$ $L_\xi\,\eta^l(x^m) = \frac{\partial}{\partial t}\partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{t=0} + \partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\eta^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{t=0} \Big\vert\, \frac{\partial}{\partial t}\partial_p = \partial_p\frac{\partial}{\partial t}$ $L_\xi\,\eta^l(x^m) = \partial_p\frac{\partial}{\partial t}\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{t=0} + \partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\eta^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{t=0} \Big\vert\, \phi_t^k(x^m) = \phi^k(t, x^m)$ $L_\xi\,\eta^l(x^m) = \partial_p\frac{\partial}{\partial t}\phi^l(-t, \phi^k(t, x^m)) \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{t=0} + \partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\eta^p(\phi^k(t, x^j))\Big\vert_{t=0}$ $L_\xi\,\eta^l(x^m) = \partial_p\left[-\dot\phi^l(-t, \phi^k(t, x^m)) + \partial_q\,\phi^l(-t, \phi^k(t, x^m)) \cdot \dot\phi^q(t, x^i)\right] \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{t=0}$ $\quad + \partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \partial_q\,\eta^p(\phi^k(t, x^j)) \cdot \dot\phi^q(t, x^j)\Big\vert_{t=0} \Big\vert\, \phi^k(t, x^m) = \phi_t^k(x^m)$ $L_\xi\,\eta^l(x^m) = \partial_p\left[-\dot\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) + \partial_q\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \dot\phi_t^q(x^i)\right] \cdot \eta^p(\phi_t^k(x^j))\Big\vert_{t=0}$ $\quad + \partial_p\,\phi_{-t}^l(\phi_t^k(x^m)) \cdot \partial_q\,\eta^p(\phi_t^k(x^j)) \cdot \dot\phi_t^q(x^j)\Big\vert_{t=0}$ $L_\xi\,\eta^l(x^m) = -\partial_p\underbrace{\dot\phi_0^l}_{\xi^l}\underbrace{(\phi_0^k(x^m))}_{(x^k)}\eta^p\underbrace{(\phi_0^k(x^j))}_{(x^k)} + \partial_p\partial_q\underbrace{\phi_0^l(\phi_0^k(x^m))}_{x^l}\underbrace{\dot\phi_0^q(x^i)}_{\xi^q(x^i)}\eta^p\underbrace{(\phi_0^k(x^j))}_{(x^k)} + \partial_p\underbrace{\phi_0^l(\phi_t^k(x^m))}_{x^l}\partial_q\,\eta^p\underbrace{(\phi_0^k(x^j))}_{(x^k)}\underbrace{\dot\phi_0^q(x^j)}_{\xi^q(x^j)}$

Lie-Ableitung eines Vektorfeldes (Fortsetzung)	$\mathrm{L}_\xi \eta^l(x^k) = -\partial_p \xi^l(x^k)\eta^p(x^k) + \partial_p \underbrace{\partial_q x^l}_{\delta_q^l} \xi^q(x^i)\eta^p(x^k) + \underbrace{\partial_p x^l}_{\delta_p^l} \partial_q \eta^p(x^k)\xi^q(x^j)$ $\mathrm{L}_\xi \eta^l(x^k) = -\partial_p \xi^l(x^k)\eta^p(x^k) + \underbrace{\partial_p \delta_q^l}_{=0} \xi^q(x^i)\eta^p(x^k) + \delta_p^l \partial_q \eta^p(x^k)\xi^q(x^j)$ $\boxed{\mathrm{L}_\xi \eta^l(x^k) = \xi^q(x^k)\cdot\partial_q \eta^l(x^k) - \eta^p(x^k)\cdot\partial_p \xi^l(k)}$ oder kurz: $\boxed{\mathrm{L}_\xi \eta^l = (\xi^q\partial_q)\eta^l - (\eta^p\partial_p)\xi^l}$... in Koordinaten Mit Basis: $\mathrm{L}_\xi \eta^l \partial_l^a = \xi^q\partial_q\eta^l\partial_l^a - \eta^p\partial_p\xi^l\partial_l^a \Longrightarrow \boxed{\mathrm{L}_\xi \eta^a = \xi^q(\partial_q\eta^a) - \eta^p(\partial_p\xi^a)}$ Betrachte analogen Ausdruck: $\mathrm{L}_\xi \eta^a = \xi^b(\tilde\nabla_b\eta^a) - \eta^b(\tilde\nabla_b\xi^a)$ ... (4) $\vert \tilde\nabla_b\eta^a = (\nabla_b\eta^a + C^a{}_{cb}\eta^c);\ \tilde\nabla_b\xi^a = (\nabla_b\xi^a + C^a{}_{cb}\xi^c)$ $\mathrm{L}_\xi \eta^a = \xi^b(\nabla_b\eta^a + C^a{}_{cb}\eta^c) - \eta^b(\nabla_b\xi^a + C^a{}_{cb}\xi^c) = \xi^b\nabla_b\eta^a - \eta^b\nabla_b\xi^a + \xi^b C^a{}_{cb}\eta^c - \eta^b C^a{}_{cb}\xi^c \vert C^a{}_{cb} = C^a{}_{bc}$ $\mathrm{L}_\xi \eta^a = \xi^b\nabla_b\eta^a - \eta^b\nabla_b\xi^a + \xi^b C^a{}_{cb}\eta^c - \eta^b \underbrace{C^a{}_{bc}\xi^c}_{b\leftrightarrow c} = \xi^b\nabla_b\eta^a - \eta^b\nabla_b\xi^a + \underbrace{\xi^b C^a{}_{cb}\eta^c - C^a{}_{cb}\xi^b\eta^c}_{=0}$ $\boxed{\mathrm{L}_\xi \eta^a = \xi^b\nabla_b\eta^a - \eta^b\nabla_b\xi^a \equiv (\xi\nabla)\eta^a - (\eta\nabla)\xi^a \overset{(4)}{=} (\xi\tilde\nabla)\eta^a - (\eta\tilde\nabla)\xi^a}$ ... (1) ... unabh. von ∇, unabh. von Koordinatensystem
Lie-Ableitung eines Kovektors	$\mathrm{L}_\xi(v^a w_a) \overset{Leibniz}{=} \mathrm{L}_\xi v^a w_a + v^a \mathrm{L}_\xi w_a \vert \mathrm{L}_\xi(v^a w_a) \overset{abl.Skalar}{=} (\xi^b\nabla_b)(v^a w_a) \overset{Leibniz}{=} (\xi^b\nabla_b)v^a w_a + v^a(\xi^b\nabla_b)w_a$ $(\xi^b\nabla_b)v^a w_a + v^a(\xi^b\nabla_b)w_a = \mathrm{L}_\xi v^a w_a + v^a \mathrm{L}_\xi w_a \vert \mathrm{L}_\xi v^a = \xi^b\nabla_b v^a - v^b\nabla_b\xi^a$ $(\xi^b\nabla_b)v^a w_a + v^a(\xi^b\nabla_b)w_a = (\xi^b\nabla_b v^a - v^b\nabla_b\xi^a)w_a + v^a \mathrm{L}_\xi w_a$ $(\xi^b\nabla_b)v^a w_a + v^a(\xi^b\nabla_b)w_a = (\xi^b\nabla_b)v^a w_a - v^b(\nabla_b\xi^a)w_a + v^a \mathrm{L}_\xi w_a \vert -(\xi^b\nabla_b)v^a w_a$ $v^a(\xi^b\nabla_b)w_a = -v^b(\nabla_b\xi^a)w_a + v^a \mathrm{L}_\xi w_a \Longrightarrow v^a(\xi^b\nabla_b)w_a = -v^b(\nabla_b\xi^a)w_a + v^a \mathrm{L}_\xi w_a \Longrightarrow$ $v^a(\xi^b\nabla_b)w_a + \underbrace{v^b(\nabla_b\xi^a)w_a}_{a\leftrightarrow b} = v^a \mathrm{L}_\xi w_a \Longrightarrow v^a(\xi^b\nabla_b)w_a + v^a(\nabla_a\xi^b)w_b = v^a \mathrm{L}_\xi w_a \vert : v^a$ $\boxed{\mathrm{L}_\xi w_a = (\xi^b\nabla_b)w_a + (\nabla_a\xi^b)w_b \equiv (\xi\nabla)w_a + (\nabla\xi)w_b}$ ... (2) ... unabh. von ∇, unabh. von Koordinatensystem
Lie-Ableitung eines $\mathcal{T}_2^0$-Tensors	$\mathrm{L}_\xi(T_{ab}v^a w^b) \overset{Leibniz}{=} \mathrm{L}_\xi T_{ab}v^a w^b + T_{ab}\mathrm{L}_\xi v^a w^b + T_{ab}v^a \mathrm{L}_\xi w^b \vert \mathrm{L}_\xi(T_{ab}v^a w^b) \overset{abl.Skalar}{=} (\xi^c\nabla_c)(T_{ab}v^a w^b)$ $(\xi^c\nabla_c)(T_{ab}v^a w^b) = \mathrm{L}_\xi T_{ab}v^a w^b + T_{ab}\mathrm{L}_\xi v^a w^b + T_{ab}v^a \mathrm{L}_\xi w^b \vert \xRightarrow{links\ Leibniz}$ $(\xi^c\nabla_c)T_{ab}v^a w^b + T_{ab}(\xi^c\nabla_c)v^a w^b + T_{ab}v^a(\xi^c\nabla_c)w^b = \mathrm{L}_\xi T_{ab}v^a w^b + T_{ab}\mathrm{L}_\xi v^a w^b + T_{ab}v^a \mathrm{L}_\xi w^b \overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $(\xi^c\nabla_c)T_{ab}v^a w^b + T_{ab}(\xi^c\nabla_c)v^a w^b + T_{ab}v^a(\xi^c\nabla_c)w^b = \mathrm{L}_\xi T_{ab}v^a w^b + T_{ab}(\xi^c\nabla_c v^a - v^c\nabla_c\xi^a)w^b + T_{ab}v^a(\xi^c\nabla_c w^b - w^b\nabla_c\xi^a)$ $\xi^c\nabla_c T_{ab}v^a w^b + T_{ab}\xi^c\nabla_c v^a w^b + T_{ab}v^a\xi^c\nabla_c w^b = \mathrm{L}_\xi T_{ab}v^a w^b + T_{ab}\xi^c\nabla_c v^a w^b - T_{ab}\xi^c\nabla_c v^a w^b + T_{ab}v^a\xi^c\nabla_c w^b - T_{ab}v^a w^b\nabla_c\xi^a$ $\xi^c\nabla_c T_{ab}v^a w^b = \mathrm{L}_\xi T_{ab}v^a w^b - T_{ab}\xi^c\nabla_c v^a w^b - T_{ab}v^a w^b\nabla_c\xi^a \vert : (v^a w^b)$ $\xi^c\nabla_c T_{ab} = \mathrm{L}_\xi T_{ab} - T_{ab}\xi^c\nabla_c - T_{ab}\nabla_c\xi^a \Longrightarrow \boxed{\mathrm{L}_\xi T_{ab} = \xi^c\nabla_c T_{ab} + \nabla_a\xi^c T_{cb} + \nabla_b\xi^c T_{ac}}$ ... (3) ... unabh. von ∇ und Koordinantensys.

Geodätische (autoparallele) Deviation

Motivation: Freifall-deviation	Motivation: Wir betrachten eine Schar von Körpern, die (nebeneinander) Richtung Erdoberfläche fallen. Sie fallen alle Richtung Erdmittelpunkt, daher gehen die Bahnlinien nicht nur „parallel nach unten", sondern die Körper bewegen sich während des Falls auch aufeinander zu. Nach Newton kann dies beschrieben werden mit $\vec F = m\vec a = m\ddot{\vec x} \vert \vec F = -m\vec\nabla\Phi \Longrightarrow -m\vec\nabla\Phi = m\ddot{\vec x} \vert : m$ $\ddot{\vec x} = -\vec\nabla\Phi \Longrightarrow \ddot x^i = -\partial_i\Phi$. Die Ortskurve eines fallenden Körpers kann mit dem Parameter t (der Zeit) parametrisiert werden: $\ddot x^i(t) = -\partial_i\Phi(t)$. Wir betrachten aber eine Schar von nebeneinander herunterfallenden Körpern, die alle jeweils eigene Ortskurven haben. Um dies darzustellen, brauchen wir einen weiteren Selektionsparameter s, mit dem wir die betrachtete Freifallkurve auswählen: $\ddot x^i(t,s) = -\partial^i\Phi(x^m(t,s))$ ... (1). Dass sich die frei fallenden Körper aufeinander zubewegen, kann man mit einem Fluss darstellen, der durch ein (lokal betrachtet horizontales) Vektorfeld $\xi^i = \left.\frac{\partial x^i(t,s)}{\partial s}\right\vert_{s=0}$ ... (2) repräsentiert wird (d.h. wir selektieren ein bestimmte Fallkurve durch die Wahl von $s = 0$ und betrachten, wie stark und in welche Richtung der Körper „zur Seite" abgelenkt wird).
Geometrische Deviations-gleichung	Da Körper „auf dem kürzesten Weg" fallen, entsprechen die oben beschriebenen Freifallkurven Autoparallelen. Zur Erinnerung: Eine Kurve ist autoparallel, wenn der Tangentenvektor u^i entlang der Kurve x^i zu sich selbst parallel bleibt; d.h.: $\boxed{u^a\nabla_a u^b \overset{!}{=} 0}$, (wobei ∇_a die Levi-Civita-Ableitung ist mit $\nabla_a g_{bc} = 0$). Es sei nun u^a das Vektorfeld, das die (geradestmöglichen) Fallkurven $x^i(t,s)$ beschreibt, und ξ^a das Vektorfeld der Strömung, welche die (horizontale) Deviation beschreibt)mit ϕ_t als zugehöriger Flussabbildung). Da die Fallkurven geradestmöglich sind, sind die beiden Vektorfelder nicht unabhängig voneinander, und es gilt: $\boxed{L_u\xi^a = 0}$. Anschaulich: die „waagrechten" Strömungslinien, die die Vektoren beschreiben, welche die horizontale Änderung der Freifallkurven darstellen, ändern sich (in Richtung der Fallkurven) nicht. $L_u\xi^a = 0 \Longrightarrow (u\nabla)\xi^a - (\xi\nabla)u^a = 0 \Longrightarrow (u\nabla)\xi^a = (\xi\nabla)u^a \vert (u\nabla)\cdot \Longrightarrow (u\nabla)^2\xi^a = (u\nabla)\big((\xi\nabla)u^a\big)$ $(u\nabla)^2\xi^a = (u\nabla)(\xi\nabla u^a) \overset{Leibniz}{=} (u\nabla)\xi^c\nabla_c u^a + \xi^c u^d\nabla_d\nabla_c u^a \vert \nabla_d\nabla_c u^a - \nabla_c\nabla_d u^a \overset{\text{def}}{=} R^a{}_{bdc}u^b \Longrightarrow \nabla_d\nabla_c u^a = \nabla_c\nabla_d u^a + R^a{}_{bdc}u^b$ $(u\nabla)^2\xi^a = (u\nabla)\xi^c\nabla_c u^a + \xi^c u^d(\nabla_c\nabla_d u^a + R^a{}_{bdc}u^b) = (u\nabla)\xi^c\nabla_c u^a + \xi^c u^d\nabla_c\nabla_d u^a + \xi^c u^d R^a{}_{bdc}u^b$ ... (1) NR: $u^d\nabla_d u^a \overset{!}{=} 0 \Longrightarrow \nabla_c(u^d\nabla_d u^a) = 0 \Longrightarrow \nabla_c u^d\nabla_d u^a + u^d\nabla_c\nabla_d u^a = 0 \Longrightarrow u^d\nabla_c\nabla_d u^a = -\nabla_c u^d\nabla_d u^a \overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $(u\nabla)^2\xi^a = (u\nabla)\xi^c\nabla_c u^a - \xi^c\nabla_c u^d\nabla_d u^a + \xi^c u^d R^a{}_{bdc}u^b \vert R^a{}_{bdc} = -R^a{}_{bcd}$ $(u\nabla)^2\xi^a = (u\nabla)\underbrace{\xi^c\nabla_c}_{c\to d} u^a - \underbrace{\xi^c\nabla_c}_{(\xi\nabla)} u^d\nabla_d u^a - \underbrace{\xi^c u^d R^a{}_{bcd}u^b}_{R^a{}_{bcd}u^b u^d\xi^c}$ $(u\nabla)^2\xi^a = (u\nabla)\xi^d\nabla_d u^a - (\xi\nabla)u^d\nabla_d u^a - R^a{}_{bcd}u^b u^d\xi^c$ $(u\nabla)^2\xi^a = \big((u\nabla)\xi^d - (\xi\nabla)u^d\big)\nabla_d u^a - R^a{}_{bcd}u^b u^d\xi^c \vert (u\nabla)\xi^d - (\xi\nabla)u^d = L_u\xi^a = 0$ $(u\nabla)^2\xi^a = -R^a{}_{bcd}u^b u^d\xi^c \Longrightarrow \boxed{(u\nabla)^2\xi^a + R^a{}_{bcd}u^b u^d\xi^c = 0}$ ... (3) Geodätische Deviationsgleichung
Newton-Gravitation als Poisson-gleichung	Der gesamte Fluss des Gravitationsfeldes $\vec g$ durch eine geschlossene Oberfläche entspricht der eingeschlossenen Masse (als Quelle des Gravitationsfeldes): $\oint_{\partial V}\vec g\, d\vec A = -4\pi G m_{\text{eingeschl.}} = -4\pi G\int_V \rho_m\, dV$ ... (4) Das negative Vorzeichen kommt daher, dass Masse anziehend wirkt; die Feldlinien zeigen zu den Massepunkten hin (in das Volumen hinein). Mit dem Satz von Gauss können wir die linke Seite von Gleichung (1) auf ein Volumsintegral umschreiben: $\oint_{\partial V}\vec g\, d\vec A = \int_V \vec\nabla\cdot\vec g\, dV$ ... (5). Setzen wir das in (4) ein, erhalten wir: $\int_V \vec\nabla\cdot\vec g\, dV = -4\pi\int_V \rho_m\, dV \Longrightarrow \vec\nabla\cdot\vec g = -4\pi\rho_m$ ... (6). Die Gravitation ist ein konservatives Kraftfeld, somit gilt: $\vec g = -\nabla\Phi$ ... (7). Eingesetzt in (6) $\Longrightarrow \vec\nabla\cdot(-\nabla\Phi) = -4\pi\rho_m \Longrightarrow \boxed{\Delta\Phi = 4\pi\rho_m}$ ... (8)

Einstein-Gleichung

Versuch einer Einstein-gleichung mit Ricci-Tensor (Einstein 1913)	$(2) \Longrightarrow \xi^i = \frac{\partial x^i(t,s)}{\partial s}\Big\vert_{s=0} \Longrightarrow \ddot{\xi}^i = \frac{\partial}{\partial s}\ddot{x}^i(t,s)\Big\vert_{s=0} \overset{(1)}{\Rightarrow} \ddot{\xi}^i = -\frac{\partial}{\partial s}\partial^i\Phi(x^m(t,s))\Big\vert_{s=0} = -\partial_i\frac{\partial}{\partial s}\Phi(x^m(t,s))\vert_{s=0}$ $\ddot{\xi}^i = -\partial^i\partial_j\Phi(x^m(t,s))\frac{\partial x^j(t,s)}{\partial s}\Big\vert_{s=0} \overset{(2)}{\Rightarrow} \ddot{\xi}^i = -\partial^i\partial_j\Phi(x^m(t,0))\xi^j \Longrightarrow \boxed{\ddot{\xi}^i + \partial^i\partial_j\Phi(x^m(t,0))\xi^j = 0} \xRightarrow{vgl.mit\ (3)}$ $R^a{}_{bcd}u^bu^d \mathrel{\hat=} \partial^a\partial_c\Phi \Longrightarrow R^a{}_{bad}u^bu^d \mathrel{\hat=} \partial^a\partial_a\Phi \Longrightarrow R_{bd}u^bu^d \mathrel{\hat=} \Delta\Phi \overset{(8)}{=} 4\pi\rho_m \,\Big\vert\, \boxed{\rho_m \mathrel{\hat=} T_{bd}u^bu^d} \Longrightarrow R_{bd}u^bu^d = 4\pi T_{bd}u^bu^d \Longrightarrow$ $R_{bd} = 4\pi T_{bd}\vert_{d\to b}^{b\to a} \Longrightarrow \boxed{R_{ab} = 4\pi T_{ab}}$ ... (9) mit T_{ab} ... Energie-Impuls-Tensor, und $\boxed{R_{bd} \overset{\text{def}}{=} R^a{}_{bad}}$ ... Rici-Tensor. Problem: Wegen lokaler Energie-Impulserhaltung muss gelten: $\text{div}(T_{ab}) = \nabla^a T_{ab} = 0$. Wegen (9) müsste dann aber auch gelten $\nabla^a R_{ab} = 0$, was aber im Allgemeinen nicht zutrifft. Wir suchen einen „Ersatz“ für R_{ab}
Einstein-Gleichung mit Einstein-Tensor	Bianci 2: $\nabla_a R^p{}_{qbc} + \nabla_c R^p{}_{qab} + \nabla_b R^p{}_{qca} = 0 \,\Big\vert\, R^p{}_{qab} = -R^p{}_{qba} \Longrightarrow \nabla_a R^p{}_{qbc} - \nabla_c R^p{}_{qba} + \nabla_b R^p{}_{qca} = 0 \,\Big\vert\, R^p{}_{qca} = -R^p{}_{qac}$ $\nabla_a R^p{}_{qbc} - \nabla_c R^p{}_{qba} - \nabla_b R^p{}_{qac} = 0 \,\Big\vert\, p \to b \Longrightarrow \nabla_a R^b{}_{qbc} - \nabla_c R^b{}_{qba} - \nabla_b^{\uparrow} R^b_{\downarrow}{}_{qac} = 0 \,\Big\vert\, R^b{}_{qbc} \overset{\text{def}}{=} R_{qc}; R^b{}_{qba} \overset{\text{def}}{=} R_{qa}$ $\nabla_a R_{qc} - \nabla_c R_{qa} - \nabla^b R_{bqac} = 0 \,\Big\vert\, R_{bqac} = -R_{qbac} \Longrightarrow \nabla_a R_{qc} - \nabla_c R_{qa} + \nabla^b R_{qbac} = 0 \Longrightarrow \nabla_a R_{qc} - \nabla_c R_{qa} = -\nabla^b R_{qbac} \,\Big\vert\, g^{ba}$ $g^{ba}\nabla_a R_{qc} - g^{ba}\nabla_c R_{qa} = -g^{ba}\nabla^b R_{qbac} \Longrightarrow \nabla^b R_{qc} - \nabla_c R_q{}^b = -\nabla^b R_{qb}{}^b{}_c \,\Big\vert\, b \to q \Longrightarrow \nabla^q R_{qc} - \nabla_c R_q{}^q = -\nabla^b R_{qb}{}^q{}_c \Longrightarrow$ $\nabla^q R_{qc} - \nabla_c R = -\nabla^b R_{bc}$ (mit $\boxed{R \overset{\text{def}}{=} R_q{}^q}$ skalare Krümmung)$\Longrightarrow \nabla^q R_{qc} + \nabla^b R_{bc} = \nabla_c R\vert_{b\to a}^{q\to a} \Longrightarrow \nabla^a R_{ac} + \nabla^a R_{ac} = \nabla_c R$ $2\nabla^a R_{ac} = \nabla_c R \Longrightarrow \nabla^a R_{ac} = \frac{1}{2}\nabla_c R \Longrightarrow \nabla^a R_{ac} - \frac{1}{2}\nabla_c R = 0 \,\Big\vert\, \nabla_c = g_{ca}\nabla^a \Longrightarrow \nabla^a R_{ac} - \frac{1}{2}g_{ca}\nabla^a R = 0 \,\Big\vert\, g_{ca}\nabla^a R = \nabla^a g_{ca} R$ (Lev.Civ) $\nabla^a R_{ac} - \frac{1}{2}\nabla^a g_{ca} R = 0 \Longrightarrow \nabla^a\left(R_{ac} - \frac{1}{2}g_{ac}R\right) = 0 \,\Big\vert\, c \to b \Longrightarrow \boxed{\nabla^a G_{ab} = 0 \text{ mit } G_{ab} \overset{\text{def}}{=} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R}$ ... (10)... Einstein-Tensor $\Longrightarrow$ wir wollen analog zu (9): $\boxed{G_{ab} = 4\pi\alpha T_{ab}}$ ... (11) **Bestimme α:** In Metrik $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1,1,1,1)$: $u_a u^a = \gamma\begin{pmatrix}-c\\ \vec{v}\end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix}c\\ \vec{v}\end{pmatrix} \Longrightarrow$ $u_a u^a = \gamma^2(-c^2 + \vec{v}^2) = -\gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = -\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}(c^2 - \vec{v}^2) = -\frac{c^2}{c^2-v^2}(c^2 - \vec{v}^2) = -c^2 \,\Big\vert\, c \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow u_a u^a = -1$ ... (12) Wenn nur Materie: $T_{ab} = \rho_m u_a u_b \overset{(9)}{\Rightarrow} R_{ab} = 4\pi\rho_m u_a u_b \,\vert \cdot u^a u^b \Longrightarrow R_{ab}u^a u^b = 4\pi\rho_m u_a u^a u_b u^b \overset{(12)}{\Longrightarrow} R_{ab}u^a u^b = 4\pi\rho_m$ ... (13) $\rho_m = T_{ab}u^a u^b \,\vert \cdot u_a u_b \overset{(12)}{\Longrightarrow} T_{ab} = \rho_m u_a u_b \,\vert \cdot g^{ba} \Longrightarrow T_{ab}g^{ba} = \rho_m u_a u_b g^{ba} \Longrightarrow T_a{}^a = \rho_m u_a u^a \overset{(12)}{\Longrightarrow} T_a{}^a = -\rho_m$ ... (14) $(11) \Longrightarrow G_{ab} = 4\pi\alpha T_{ab} \overset{(10)}{\Longrightarrow} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 4\pi\alpha T_{ab} \,\Big\vert \cdot g^{ba} \Longrightarrow R_{ab}g^{ba} - \frac{1}{2}g_{ab}g^{ba}R = 4\pi\alpha T_{ab}g^{ba} \Longrightarrow$ $R_a{}^a - \frac{1}{2}g_a{}^a R = 4\pi\alpha T_a{}^a \,\Big\vert\, R_a{}^a \overset{\text{def}}{=} R; g_a{}^a = 4 \Longrightarrow R - \frac{1}{2}4R = 4\pi\alpha T_a{}^a \Longrightarrow R = -4\pi\alpha T_a{}^a \overset{(14)}{\Longrightarrow} R = 4\pi\alpha\rho_m$ ... (15) $(11) \Longrightarrow G_{ab} = 4\pi\alpha T_{ab} \overset{(10)}{\Longrightarrow} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 4\pi\alpha T_{ab} \,\Big\vert \cdot u^a u^b \Longrightarrow R_{ab}u^a u^b - \frac{1}{2}g_{ab}u^a u^b R = 4\pi\alpha T_{ab}u^a u^b \Longrightarrow$ $R_{ab}u^a u^b - \frac{1}{2}u^a u_a R = 4\pi\alpha T_{ab}u^a u^b \,\Big\vert\, T_{ab} = \rho_m u_a u_b \Longrightarrow R_{ab}u^a u^b - \frac{1}{2}u^a u_a R = 4\pi\alpha\rho_m u_a u^a u_b u^b \overset{(12)}{\Longrightarrow}$ $R_{ab}u^a u^b + \frac{1}{2}R = 4\pi\alpha\rho_m \overset{(15)}{\Longrightarrow} R_{ab}u^a u^b + \frac{1}{2}4\pi\alpha\rho_m = 4\pi\alpha\rho_m \Longrightarrow R_{ab}u^a u^b = 2\pi\alpha\rho_m \overset{(13)}{\Longrightarrow} 4\pi\rho_m = 2\pi\alpha\rho_m \vert : (2\pi\rho_m) \Longrightarrow$ $\alpha = 2 \overset{(13)}{\Longrightarrow} \boxed{G_{ab} = 8\pi T_{ab}}$...Einstein-Gleichung mit $G_{ab} \overset{\text{def}}{=} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$ T_{ab} ... Energie/Impuls-Tensor beinhaltet neben Massen- und Energiedichte auch z.B. den Druck, den ein Strahlungsfeld ausübt „Quelle“ des Feldes. Eigenschaften: symmetrisch, $\nabla^a T_{ab} = 0$ G_{ab} ... Einsteintensor beschreibt Krümmung der Raumzeit. Eigenschaften: symmetrisch, $\nabla^a G_{ab} = 0$
Energie-Impuls-Tensor	Bedingung: $\forall u^a u^b g_{ab} = -c^2 = -1$: $\rho_m = T_{ab}u^a u^b \geq 0$. Wenn nur Materie: $T_{ab} = \rho_m u_a u_b$. Divergenz des Spannungstensors ist Volumskraft $\Longrightarrow$ Wenn $\nabla^a T_{ab} = 0 \Longrightarrow$ kräftefrei.

Vakuum-Lösungen

Bedingung	Ann: $T_{ab} = 0$. Damit ist $\rho_m = T_{ab}u^a u^b \geq 0$ erfüllt. Wenn $R_{ab} = 0$, dann ist trivialerweise auch $G_{ab} \overset{\text{def}}{=} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0$ ... (1). Umgekehrt: Wenn $G_{ab} = 0 \Longrightarrow G^a{}_b = 0 \Longrightarrow G^a{}_a = 0 \Longrightarrow R^a{}_a - \frac{1}{2}g^a{}_a R = 0 \Longrightarrow R - \frac{1}{2}4R = 0 \Longrightarrow R = 0$ ... (2) $G_{ab} \overset{\text{def}}{=} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R \overset{(2)}{\Rightarrow}$ Wenn $G_{ab} = 0 \Longrightarrow R_{ab} = G_{ab} = 0$ ... (3) Aus (3), (4) $\Longrightarrow \boxed{R_{ab} = 0 \Longleftrightarrow G_{ab} = 0}$

Skalarwertige Differentialformen

Definition	Eine Differentialform der Ordnung p ist ein total antisymmetrischer (total kovarianter) $(0,p)$-Tensor
Skalarwertige Diff.form	Wenn die Einträge des total antisymmetrischen Tensors Skalare sind, handelt es sich um eine skalarwertige Differentialform. $\omega_{a_1\dots a_p} \in \tau_p : \omega_{a_1\dots a_b a_c \dots a_p} = -\omega_{a_1\dots a_c a_b \dots a_p} \forall a_b a_c \in \{a_1 \dots a_p\}$ ... total antisymmetrisch $\omega_{a_1\dots a_p} \equiv \omega_{I_p}$
Antisymme-trisierer	$\delta^{a_1\dots a_p}_{b_1\dots b_p} = \mathrm{sgn}(\pi(a_1 \dots a_p))\,\mathrm{sgn}(\pi(b_1 \dots b_p))$ $\delta^{a_1\dots a_{p+1}}_{b_1\dots b_{p+1}} = \delta^{a_1}_{b_1}\delta^{a_2\dots a_{p+1}}_{b_2\dots b_{p+1}} - \delta^{a_1}_{b_2}\delta^{a_2\dots a_{p+1}}_{b_1 b_3\dots b_{p+1}} + \cdots \delta^{a_1}_{b_{p+1}}\delta^{a_2\dots a_{p+1}}_{b_1\dots b_p}$
Äußeres Prod. (Keilprodukt)	$\left(\omega_{a_1\dots a_p} \wedge \varphi_{b_1\dots b_q}\right)_{c_1\dots c_{p+q}} = \frac{1}{p!q!}\delta^{a_1\dots a_p b_1\dots b_q}_{c_1\dots c_{p+q}}\omega_{a_1\dots a_p}\varphi_{b_1\dots b_q}$ Notation: $\underset{p}{\omega} \wedge \underset{q}{\varphi} = (\underset{p}{\omega} \wedge \underset{q}{\varphi})_{I_{p+q}} = \delta^{I_p I_q}_{I_{p+q}}\omega_{I_p}\varphi_{I_p}$ $(\underset{p}{\omega} \wedge \underset{q}{\varphi})_{c_1\dots c_{p+q}} = (-1)^{pq}\ (\underset{q}{\varphi} \wedge \underset{p}{\omega})_{c_1\dots c_{p+q}}$ oder kürzer: $\underset{p}{\omega} \wedge \underset{q}{\varphi} = (-1)^{pq}\ \underset{q}{\varphi} \wedge \underset{p}{\omega}$
Äußere Ableitung	Die äußere Ableitung erweitert das Konzept der „Ableitung einer Funktion“ auf Differentialformen höherer Ordnung. Es ist ein Operator $d: \Lambda^p \to \Lambda^{p+1}$ (mit Λ als Raum der p-Formen auf M) mit folgenden Eigenschaften: (1) $d(\alpha+\beta) = d\alpha + d\beta$ (Linearität); (2) $d^2 = 0$ (Nilpotenz); (3) bei 0-Formen (i.e. Funktionen): $\boxed{(df)_a \overset{\text{def}}{=} \nabla_a f = \partial_a f}$ (4) $d(f\omega) = (df)\wedge\omega + f\,d\omega$ für f ... Funktion, ω...Differenzialform (Kettenregel 1), und (5) $d(\alpha\wedge\beta) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta$ für $\alpha \in \Lambda^p, \beta \in \Lambda^q$ (abgeleitete Kettenregel 2) $\boxed{\left(d\omega_{b_1\dots b_p}\right)_{a_1\dots a_{p+1}} = \frac{1}{p!}\delta^{bb_1\dots b_p}_{a_1\dots a_{p+1}}\nabla_b\omega_{b_1\dots b_p}}$ ... unabhängig von ∇: $d^\nabla\omega = d^{\tilde\nabla}\omega$ $\left(d^2\omega_{c_1\dots c_p}\right)_{a_1\dots a_{p+2}} = \left(d\left(d\omega_{c_1\dots c_p}\right)_{b_1\dots b_{p+1}}\right)_{a_1\dots a_{p+2}} = d\left(\frac{1}{p!}\delta^{cc_1\dots c_p}_{b_1\dots b_{p+1}}\nabla_c\omega_{c_1\dots c_p}\right)_{a_1\dots a_{p+2}} = \frac{1}{(p+1)!}\delta^{bb_1\dots b_{p+1}}_{a_1\dots a_{p+2}}\nabla_b\left(\frac{1}{p!}\delta^{cc_1\dots c_p}_{b_1\dots b_{p+1}}\nabla_c\omega_{c_1\dots c_p}\right)$ $\left(d^2\omega_{c_1\dots c_p}\right)_{a_1\dots a_{p+2}} = \frac{1}{p!}\frac{1}{(p+1)!}\delta^{b_1\dots b_{p+1}}_{a_1\dots a_{p+2}}\delta^{c_1\dots c_p}_{b_1\dots b_{p+1}}\nabla_b\nabla_c\omega_{c_1\dots c_p} \overset{\nabla\to\partial}{=} \frac{1}{p!}\frac{1}{(p+1)!}\delta^{\overbrace{bc}^{anti}\,c_1\dots c_p}_{a_1\dots a_{p+2}}\underbrace{\partial_b\partial_c}_{symmetr}\ \omega_{c_1\dots c_p} \Longrightarrow \boxed{d^2\omega_{c_1\dots c_p} = 0}$

Vektor- und tensorwertige Differentialformen

Vektorwertige Diff.form	Wenn die Einträge des total antisymmetrischen Tensors Vektoren sind, handelt es sich um eine vektorwertige Differenzialform. Beispiele: v^a... vektorwertige 0-Form; $v^a{}_{b_1\dots b_p}$ ... vektorwertige p-Form
Äußere Ableitung	vektorwertige 1-Form: $(dv^a)_b \overset{\text{def}}{=} \nabla_b v^a$ ... (1) (2,0)-tensorwertige 1-Form $(dt^{ab})_c \overset{\text{def}}{=} \nabla_c t^{ab}$ ... (2) (1,1)-tensorwertige 2-Form: $(dt^a{}_b)_{cd} = \delta^{mb}_{cd}\nabla_m t^a{}_b$ ... (3) $(d^2v^a)_{cd} = (d(dv^a)_b)_{cd} \overset{(1)}{=} \left(d(\nabla_b v^a)\right)_c \overset{(3)}{=} \delta^{mb}_{cd}\nabla_m\nabla_b v^a = (\nabla_c\nabla_d - \nabla_d\nabla_c)v^a \overset{cd\to bc}{\Longrightarrow}$ $\boxed{(d^2v^a)_{bc} = (\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)v^a \overset{Riemanntensor}{=} R^a{}_{mbc}v^m}$
Inneres Produkt Vektor v p-Form ω	$v\lrcorner\underset{p}{\omega} = (v\lrcorner\underset{p}{\omega})_{I_{p-1}} \overset{\text{def}}{=} (v^a\omega_a)_{I_{p-1}}$ Ricci-Tensor: $\underset{\lrcorner 2=1}{E_\alpha\lrcorner R^{\alpha\beta}} = \left(E_\alpha\lrcorner R^{\alpha\beta}\right)_b = E^c_\alpha R^{\alpha\beta}{}_{cb} = R^{c\beta}{}_{cb} = R^\beta{}_b = \underset{1}{R^\beta}$ ... Vektor von 1-Formen Krümmungs-Skalar: $\underset{\lrcorner 1=0}{E_\alpha\lrcorner R^\alpha} = E^a_\alpha R^\alpha{}_a = R^a{}_a = R = \underset{0}{R}$...Krümmungsskalar $v\lrcorner(\underset{p}{\omega}\wedge\underset{q}{\varphi}) = \underset{\lrcorner p=p-1}{(v\lrcorner\omega)}\wedge\underset{q}{\varphi} + (-1)^{pq}\underset{\lrcorner q=q-1}{(v\lrcorner\varphi)}\wedge\underset{p}{\omega}$ │ $\underset{q-1}{a}\wedge\underset{p}{b} = (-1)^{p(q-1)}\ \underset{p}{b}\wedge\underset{q-1}{a} \Longrightarrow$ $v\lrcorner(\underset{p}{\omega}\wedge\underset{q}{\varphi}) = \underset{\lrcorner p=p-1}{(v\lrcorner\omega)}\wedge\underset{q}{\varphi} + (-1)^{pq}(-1)^{p(q-1)}\underset{p}{\omega}\wedge\underset{\lrcorner q=q-1}{(v\lrcorner\varphi)}$ │ $(-1)^{pq}(-1)^{p(q-1)} = (-1)^{2pq-p} = \underbrace{(-1)^{2pq}}_{1}(-1)^{-p} = \frac{1}{(-1)^p} = (-1)^p$ $\boxed{v\lrcorner(\underset{p}{\omega}\wedge\underset{q}{\varphi}) = \underset{\lrcorner p=p-1}{(v\lrcorner\omega)}\wedge\underset{q}{\varphi} + (-1)^p\underset{p}{\omega}\wedge\underset{\lrcorner q=q-1}{(v\lrcorner\varphi)}}$ ... graduierte Derivation

Cartan'sche Strukturrelationen

<table>
<tr>
<td>Zweite Cartan'sche Struktur-relation</td>
<td>
Sei E^a_α ein Basisvektorfeld. Dann muss dE^a_α in der Basis E^a_α darstellbar sein als $(dE^a_\alpha)_c \overset{\text{def}}{=} \left(\underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha}\right)_c \wedge \underset{0}{E^a_\beta} = \left(\omega^\beta{}_\alpha\right)_c E^a_\beta \Longrightarrow$
$dE^a_\alpha = (dE^a_\alpha)_c = \underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta}$ ... (1), wobei $\left(\omega^\beta{}_\alpha\right)_c = (\omega_c)^\beta{}_\alpha$ eine Matrix von 1-Formen ist ($\omega^\beta{}_\alpha$ ... „Ricci Rotationskoeffizient").
Analog ist darstellbar: $(d^2E^a_\alpha)_{cd} \overset{\text{def}}{=} \left(R^\beta{}_\alpha\right)_{cd} E^a_\beta = \underset{2}{R^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta}$ ... (2) mit Riemanntensor $\left(R^\beta{}_\alpha\right)_{cd} = (R_{cd})^\beta{}_\alpha$ Matrix von 2-Formen
$(d^2E^a_\alpha)_{cd} = (d(dE^a_\alpha)_c)_d \overset{(1)}{=} d\left(\underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta}\right) = d\left(\underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha} \wedge \underset{0}{E^a_\beta}\right) \;\Big|\; d(\underset{p}{\alpha} \wedge \underset{q}{\beta}) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$
$(d^2E^a_\alpha)_{cd} = \underset{d1=2}{d\omega^\beta{}_\alpha} \wedge \underset{0}{E^a_\beta} + (-1)^1 \underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha} \wedge \underset{d0=1}{dE^a_\beta} = \underset{d1=2}{d\omega^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta} - \underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha} \wedge \underset{d0=1}{dE^a_\beta} \overset{(1)}{=} \underset{d1=2}{d\omega^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta} - \overbrace{\underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha} \wedge \underset{1}{\omega^\gamma{}_\beta}\,\underset{0}{E^a_\gamma}}^{\gamma\leftrightarrow\beta}$
$(d^2E^a_\alpha)_{cd} = \underset{d1=2}{d\omega^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta} - \underset{1}{\omega^\gamma{}_\alpha} \wedge \underset{1}{\omega^\beta{}_\gamma}\,\underset{0}{E^a_\beta} \overset{(2)}{\Rightarrow} \underset{2}{R^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta} = \underset{d1=2}{d\omega^\beta{}_\alpha}\,\underset{0}{E^a_\beta} - \underset{1}{\omega^\gamma{}_\alpha} \wedge \underset{1}{\omega^\beta{}_\gamma}\,\underset{0}{E^a_\beta} \;\Big|\; : E^a_\beta \Longrightarrow \boxed{\underset{2}{R^\beta{}_\alpha} = \underset{d1=2}{d\omega^\beta{}_\alpha} - \underset{1}{\omega^\gamma{}_\alpha} \wedge \underset{1}{\omega^\beta{}_\gamma}}$ ... (3a) $\Longrightarrow$
$\underset{2}{R^\beta{}_\alpha} = \underset{d1=2}{d\omega^\beta{}_\alpha} + \underset{1}{\omega^\beta{}_\gamma} \wedge \underset{1}{\omega^\gamma{}_\alpha} \;\Big|\; \alpha \leftrightarrow \beta \Longrightarrow \boxed{\underset{2}{R^\alpha{}_\beta} = \underset{d1=2}{d\omega^\alpha{}_\beta} + \underset{1}{\omega^\alpha{}_\gamma} \wedge \underset{1}{\omega^\gamma{}_\beta}} \;\Big|\; \cdot \eta^{\beta\mu} \Longrightarrow \underset{2}{R^{\alpha\mu}} = \underset{d1=2}{d\omega^{\alpha\mu}} + \underset{1}{\omega^\alpha{}_\gamma} \wedge \underset{1}{\omega^{\gamma\mu}} \;\Big|\; \mu \to \beta$
$\boxed{\underset{2}{R^{\alpha\beta}} = \underset{d1=2}{d\omega^{\alpha\beta}} + \underset{1}{\omega^\alpha{}_\gamma} \wedge \underset{1}{\omega^{\gamma\beta}}}$ ... (3b)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Erste Cartan'sche Struktur-relation</td>
<td>
δ^a_b kann als vektorwertige 1-Form gesehen werden: $\delta^a_b = (\delta^a)_b = \underset{1}{\delta^a}$ ... (4) Außerdem: $\underset{1}{\delta^a} \overset{(3)}{=} \delta^a_b = dx^\mu_b\,\partial^a_\mu = \underset{d0=1}{dx^\mu}\,\underset{0}{\partial^a_\mu}$ ... (5)
$\underset{d1=2}{d\delta^a} \overset{(5)}{=} d\left(dx^\mu\,\partial^a_\mu\right) = d\left(\underset{d0=1}{dx^\mu}\,\underset{0}{\partial^a_\mu}\right) = d\left(\underset{d0=1}{dx^\mu} \wedge \underset{0}{\partial^a_\mu}\right) \;\Big|\; d(\underset{p}{\alpha} \wedge \underset{q}{\beta}) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$
$\underset{d1=2}{d\delta^a} = \underset{d^2 0=2}{d^2x^\mu} \wedge \underset{0}{\partial^a_\mu} + (-1)^1 \underset{1}{\omega^\beta{}_\alpha} \wedge \underset{d0=1}{dE^a_\beta} = \underset{d^2 0=2}{d^2x^\mu}\,\underset{0}{\partial^a_\mu} - \underset{d0=1}{dx^\mu} \wedge \underset{d0=1}{d\partial^a_\mu} \;\Big|\; d^2x^\mu = 0 \Longrightarrow \underset{d1=2}{d\delta^a} = -\underset{d0=1}{dx^\mu} \wedge \underset{d0=1}{d\partial^a_\mu}$ ... (6)
$\underset{d0=1}{d\partial^a_\mu} = \left(d\partial^a_\mu\right)_b \;\Big|\; (df)_b \overset{\text{def}}{=} \nabla_b f \Longrightarrow \underset{d0=1}{\left(d\partial^a_\mu\right)_b} = \nabla_b\partial^a_\mu = \nabla_b\partial^a_\mu - 0_b \;\Big|\; \partial_b\partial^a_\mu = 0 \Longrightarrow \underset{d0=1}{\left(d\partial^a_\mu\right)_b} = \nabla_b\partial^a_\mu - \partial_b\partial^a_\mu = (\nabla_b - \partial_b)\partial^a_\mu$
$\underset{d0=1}{d\partial^a_\mu} = \underset{d0=1}{\left(d\partial^a_\mu\right)_b} = \Gamma^a{}_{mb}\partial^m_\mu = \Gamma^a{}_{\mu b} = \Gamma^a{}_{\mu\nu}\,dx^\nu_b = \left(\Gamma^a{}_{\mu\nu}\,dx^\nu\right)_b = \underset{0}{\Gamma^a{}_{\mu\nu}}\,\underset{1}{dx^\nu} \overset{(6)}{\Longrightarrow}$
$\underset{d1=2}{d\delta^a} = -\underset{d0=1}{dx^\mu} \wedge \underset{d0=1}{dx^\nu}\,\underset{0}{\Gamma^a{}_{\mu\nu}} \;\Big|\; dx^\mu \wedge dx^\nu$ ...antisymmetrisch in $\mu\nu$, $\Gamma^a{}_{\mu\nu}$ ... symmetrisch in $\mu\nu$ $\Longrightarrow \underset{d1=2}{d\delta^a} = 0$ ... (7)
$\underset{1}{\delta^a} \overset{(4)}{=} \delta^a_b = e^\mu_b E^a_\mu = \left(e^\mu E^a_\mu\right)_b = \underset{1}{e^\mu}\underset{0}{E^a_\mu} = \underset{1}{e^\mu} \wedge \underset{0}{E^a_\mu} \overset{(7)}{\Rightarrow} d\left(\underset{1}{e^\mu} \wedge \underset{0}{E^a_\mu}\right) = 0 \;\Big|\; d(\underset{p}{\alpha} \wedge \underset{q}{\beta}) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$
$\underset{d1=2}{de^\mu} \wedge \underset{0}{E^a_\mu} + (-1)^1 \underset{1}{e^\mu} \wedge \underset{d0=1}{\mathrm{d}E^a_\mu} = \underset{d1=2}{de^\mu}\,\underset{0}{E^a_\mu} - \underset{1}{e^\mu} \wedge \underset{d0=1}{\mathrm{d}E^a_\mu} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \underset{d1=2}{de^\beta}\,\underset{0}{E^a_\beta} - \underset{1}{e^\mu} \wedge \underset{1}{\omega^\beta{}_\mu}\underset{0}{E^a_\beta} = \left(\underset{d1=2}{de^\beta} - \underset{1}{e^\mu} \wedge \underset{1}{\omega^\beta{}_\mu}\right)E^a_\beta = 0 \;\Big|\; : E^a_\beta$
$\underset{d1=2}{de^\beta} - \underset{1}{e^\mu} \wedge \underset{1}{\omega^\beta{}_\mu} = \underset{d1=2}{de^\beta} + \underset{1}{\omega^\beta{}_\mu} \wedge \underset{1}{e^\mu} = 0 \Longrightarrow \boxed{\underset{d1=2}{de^\beta} = -\underset{1}{\omega^\beta{}_\mu} \wedge \underset{1}{e^\mu}}$ ... (8)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Ricci Rotations-koeffizient</td>
<td>
Wir betrachten die inverse Metrik $g^{ab} = \eta^{\alpha\beta}E^a_\alpha E^b_\beta$ ... (9) Es gilt: $\underset{d1=2}{dg^{ab}} = \left(dg^{ab}\right)_c \overset{\text{def}}{=} \nabla_c g^{ab} = 0$ ... (10) für ∇_c Levi Civita
$0 \overset{(10)}{=} \underset{d0=1}{dg^{ab}} \overset{(9)}{=} d\left(\underset{0}{\eta^{\alpha\beta}}\underset{0}{E^a_\alpha}\underset{0}{E^b_\beta}\right) \overset{\text{Leibniz}}{=} \underset{0}{\eta^{\alpha\beta}}\,\underset{d0=1}{dE^a_\alpha}\,\underset{0}{E^b_\beta} + \underset{0}{\eta^{\alpha\beta}}\underset{0}{E^a_\alpha}\,\underset{d0=1}{dE^b_\beta} \overset{(1)}{=} \underset{0}{\eta^{\alpha\beta}}\,\underset{1}{\omega^\gamma{}_\alpha}\underset{0}{E^a_\gamma}\,\underset{0}{E^b_\beta} + \underset{0}{\eta^{\alpha\beta}}\underset{0}{E^a_\alpha}\,\underset{1}{\omega^\gamma{}_\beta}\underset{0}{E^b_\gamma} = \overbrace{\underset{1}{\omega^{\gamma\beta}}\underset{0}{E^a_\gamma}\,\underset{0}{E^b_\beta}}^{\gamma\to\alpha} + \overbrace{\underset{1}{E^a_\alpha}\,\underset{0}{\omega^{\gamma\alpha}}\underset{0}{E^b_\gamma}}^{\gamma\to\beta}$
$0 = \underset{1}{\omega^{\alpha\beta}}\underset{0}{E^a_\alpha}\,\underset{0}{E^b_\beta} + \underset{1}{E^a_\alpha}\,\underset{0}{\omega^{\beta\alpha}}\underset{0}{E^b_\beta} = \left(\underset{1}{\omega^{\alpha\beta}} + \underset{1}{\omega^{\beta\alpha}}\right)\underset{0}{E^a_\alpha}\,\underset{0}{E^b_\beta} \Longrightarrow \underset{1}{\omega^{\alpha\beta}} + \underset{1}{\omega^{\beta\alpha}} = 0 \Longrightarrow$
$\boxed{\underset{1}{\omega^{\alpha\beta}} = -\underset{1}{\omega^{\beta\alpha}}}$ ... (11) antisymmetr. Tensor mit Einträgen, die 1-Formen sind. Lässt Metrik unverändert. Infinites. Lorenz-Trafo.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Riemann-tensor</td>
<td>
$(3b) \Longrightarrow \underset{2}{R^{\alpha\beta}} = \underset{d1=2}{d\omega^{\alpha\beta}} + \underset{1}{\omega^\alpha{}_\gamma} \wedge \underset{1}{\omega^{\gamma\beta}} \overset{(11)}{=} -\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} + \underset{1}{\omega^\alpha{}_\gamma} \wedge \underset{1}{\omega^{\gamma\beta}} = -\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} + \underset{0}{\eta_{\delta\gamma}}\underset{1}{\omega^{\alpha\delta}} \wedge \underset{1}{\omega^{\gamma\beta}} \overset{(11)}{\Longrightarrow}$
$\underset{2}{R^{\alpha\beta}} = -\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} + \underset{0}{\eta_{\delta\gamma}}\underset{1}{\omega^{\delta\alpha}} \wedge \underset{1}{\omega^{\beta\gamma}} \;\Big|\; \underset{p}{\omega} \wedge \underset{q}{\varphi} = (-1)^{pq}\; \underset{q}{\varphi} \wedge \underset{p}{\omega} \Longrightarrow \underset{2}{R^{\alpha\beta}} = -\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} + \underset{0}{\eta_{\delta\gamma}}(-1)^{1\cdot 1}\underset{1}{\omega^{\beta\gamma}} \wedge \underset{1}{\omega^{\delta\alpha}} \Longrightarrow$
$\underset{2}{R^{\alpha\beta}} = -\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} - \underset{0}{\eta_{\delta\gamma}}\underset{1}{\omega^{\beta\gamma}} \wedge \underset{1}{\omega^{\delta\alpha}} = -\left(\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} + \underset{0}{\eta_{\delta\gamma}}\underset{1}{\omega^{\beta\gamma}} \wedge \underset{1}{\omega^{\delta\alpha}}\right) = -\overbrace{\left(\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} + \underset{1}{\omega^\beta{}_\delta} \wedge \underset{1}{\omega^{\delta\alpha}}\right)}^{\delta\to\gamma} = -\left(\underset{d1=2}{d\omega^{\beta\alpha}} + \underset{1}{\omega^\beta{}_\gamma} \wedge \underset{1}{\omega^{\gamma\alpha}}\right) \overset{(3b)}{\Longrightarrow}$
$\boxed{\underset{2}{R^{\alpha\beta}} = -\underset{2}{R^{\beta\alpha}}}$ ... (12)
</td>
</tr>
</table>

Schwarzschild-Geometrie

Bedingungen		(i) Vakuum-Lösung, siehe „Vakuum-Lösung“: $\boxed{R_{ab} = 0 \Leftrightarrow G_{ab} = 0}$, (ii) Raumzeit ist statisch, (iii) sphärische Geometrie
(ii) statische Raumzeit		Wir transportieren die Punkte einer Gleichzeit(hyper)ebene Σ des Beobachters mit einem Fluss, der durch die Flussabbildung ϕ_t^k beschrieben wird. Es sei ξ^a das Vektorfeld dieser Transportströmung. Wir fordern: ξ^a sei zeitartig. Wir fordern außerdem: Die Metrik sei zeitunabhängig (der Fluss lässt die Metrik invariant), dh. ξ^a ist ein Killing-Vektorfeld $\Longrightarrow$ $\exists$ Koordinatensystem, wo $\xi^a = \partial_t^a$ die Koordinatenableitung in Richtung t ist (wo ϕ_t^k die Zeitachse ist). $\boxed{L_\xi g_{ab} = 0} \Longrightarrow L_\xi g_{ab} = \xi^m \tilde{\nabla}_m g_{ab} + \tilde{\nabla}_a \xi^m g_{mb} + \tilde{\nabla}_b \xi^m g_{am} = 0 \Longrightarrow \tilde{\nabla} \to \nabla$ ($\tilde{\nabla}$ sei Levi-Vivita) $\Longrightarrow \nabla_m g_{ab} = 0 \Longrightarrow$ $\nabla_a \xi^m g_{mb} + \nabla_b \xi^m g_{am} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \Longrightarrow \nabla_a \xi_b = -\nabla_b \xi_a$ … (1) ($\nabla_a \xi_b$ ist antisymmetrisch) Sei γ eine Autoparallele, d.h. der Tangentenvektor u^a entlang der Kurve γ bleibt zu sich selbst parallel, d.h.: $u^m \nabla_m u^b = 0$. Außerdem ist ξ^a Killing, d.h. $L_\xi g_{ab} = 0$. Dann gilt: $\underbrace{(u^a \nabla_a)}_{\text{Abl. Richtung Tang.vekt. } u^a} \underbrace{(\xi_b u^b)}_{\text{"Winkel" zw. } \xi \text{ und } u} = u^a u^b \nabla_a \xi^b + \xi_b \underbrace{u^a \nabla_a u^b}_{\substack{=0 \\ \text{autoparallel}}} = \underbrace{u^a u^b}_{\text{symm.}} \underbrace{\nabla_a \xi^b}_{\substack{\text{antisymm} \\ \text{siehe (1)}}} = 0$ Das innere Produkt (der Winkel) zwischen ξ^a und u^a ist konstant entlang der Autoparallelen γ $\exists$ Hyperflächen Σ, so dass $T_p\Sigma \perp \xi^a \Longrightarrow \xi^a$ ist hso (hyperflächenorthogonal)
		Metrik ist in Koordinatensystem nicht von der Zeit abhängig. Beweis: $L_\xi g_{ab} \overset{\nabla \to \partial}{=} \xi^m \partial_m g_{ab} + \partial_a \xi^m g_{mb} + \partial_b \xi^m g_{am} = 0 \,\Big\vert\, \xi^a = \partial_t^a$ (zeitartig) $\Longrightarrow \partial_t^m \partial_m g_{ab} + \underbrace{\partial_a \partial_t^m}_{=0} g_{mb} + \underbrace{\partial_b \partial_t^m}_{=0} g_{am} = 0$ $\partial_t^m \partial_m g_{ab} = \partial_t^m \partial_m (g_{\mu\nu}\, dx_a^\mu\, dx_b^\nu) = \partial_t (g_{\mu\nu}\, dx_a^\mu\, dx_b^\nu) = \partial_t g_{\mu\nu}\, dx_a^\mu\, dx_b^\nu + g_{\mu\nu} \underbrace{\partial_t\, dx_a^\mu}_{=0} dx_b^\nu + g_{\mu\nu}\, dx_a^\mu \underbrace{\partial_t\, dx_b^\nu}_{=0} = 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\partial_t g_{\mu\nu} = 0 \Longrightarrow g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i)\ i \in \{1,2,3\} \Longrightarrow g_{ab} = -f^2(x^k)\, dt_a\, dt_b + k_{ij}(x^k)\, dx_a^i\, dx_b^j\ i,j \in \{1,2,3\}}$
(iii) sphärische Symmetrie	Gruppe:	Ein Paar $(G,\circ)$ heißt Gruppe, wenn die Menge $G \neq \emptyset$ und das Gruppenprodukt $\circ$ folgende Eigenschaften erfüllt: (1) $\circ: G \times G \to G$ (abgeschlossen in Bezug auf das Gruppenprodukt) (2) $\forall a,b,c \in G: (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (assoziativ) (3) $\forall a \in G: \exists E \in G: a \circ E = E \circ a = a$ ($\exists$ neutrales Element E) (4) $\forall a \in G: \exists a^{-1} \in G: a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = \mathbb{1}$ ($\exists$ Inverse) Wenn zusätzlich gilt $\forall a,b \in G: a \circ b = b \circ a$ (kommutativ), dann ist $(G,\circ)$ eine abelsche Gruppe.
	Lie-Gruppe:	Eine Lie-Gruppe G ist eine glatte reelle Mannigfaltigkeit, die zusätzlich die Struktur einer Gruppe besitzt, so dass die Gruppenverknüpfung und die Inversion beliebig oft differenzierbar sind. Beispiel für G als Mannigfaltigkeit: Rotationen in $\mathbb{R}^3$ lassen sich als Punkte g in einer Vollkugel $G = SO(3)$ mit Radius π darstellen. Der Ortsvektor aus dem Ursprung zu g codiert die Drehachse, die Länge des Vektors den Drehwinkel. An der Oberfläche der Kugel ist die Drehung π. Gegenüberliegende Punkte der Kugel werden miteinander identifiziert (Drehung um π = Drehung um $-\pi$).
	Wirkung	Jedem Element $g \in G$ ist ein Wirkung Φ_g zugeordnet: $g \in G \mapsto \Phi_g$. Diese Wirkung Φ_g ist eine Abbildung von M nach M. $\Phi_g: M \to M$. Bedingungen: (1) $\forall p \in M: \Phi_E(p) = p$ (Die Wirkung Φ_E des neutralen Elements E ist neutral) (2) $\forall p \in M, \forall g,h \in G: \Phi_{g \circ h}(p) = \Phi_g(\Phi_h(p))$ (3) $\forall g \in G: \Phi_{g^{-1}}(\Phi_g(p)) = p$ (4) $\forall g \in G: \Phi_g$ ist differenzierbar
	T_eG	Sei E das neutrale Element von G und $\gamma(t)$ eine Kurve in G mit $\gamma(0) = E$. Dann ist $\gamma'(t)$ ein Tangentialvektor von G in E. Die Menge aller solcher Tangentialvektoren heißt Tangentialraum T_eG an G.
	SO(3)	Sei $g(t)$ eine Integralkurve in $G = SO(3)$. Dann ist $\Phi_t = \Phi_{g(t)}: M \to M$ die Wirkung auf M, und $\Phi_0 = \Phi_{g(0)} = Id$ die neutrale Wirkung. $\Phi_t(p) = \Phi_{g(t)}(p) = \gamma(t)$ ist eine Kurve in M. Die Tangentenvektoren ξ^a an diese Kurve $\gamma(t)$ sind Killingvektoren $\xi^a = \partial_t^a\, \Phi_t(p)$.
	Orbits	Der Orbit $\mathrm{Orb}_G(p)$ eines Punktes p sind alle Punkte, die man aus der Wirkung $\Phi_{g(t)}(p)$ der Gruppe auf den Punkt p erreicht. $\mathrm{Orb}_G(p) = \{q \in M: \exists g \in G: \Phi_{g(t)}(p) = q\}$. SO(3)-Orbits sind runde S^2: $\mathrm{Orb}_{SO(3)}(p) \simeq S^2$ $\mathrm{Orb}_G(p)$ ist für jeden Punkt p eindeutig: $\mathrm{Orb}_G(p) \cap \mathrm{Orb}_G(q) = \begin{cases} 0 & wenn\ q \notin \mathrm{Orb}_G(p) \\ \mathrm{Orb}_G(p) & wenn\ q \in \mathrm{Orb}_G(p) \end{cases}$
	runde Metrik	$g_{ab}(\mathrm{Orb}_{SO(3)}(p)) = r^2 \Omega_{ab}$ mit $\Omega_{ab} = d\vartheta_a\, d\vartheta_b + \sin^2(\vartheta)\, d\varphi_a\, d\varphi_b$ Flächenradius: $r = \sqrt{\frac{\mathrm{Area}(\mathrm{Orb}_{SO(3)}(p))}{4\pi}}$
	S.schild metrik	$\nabla^a r \perp T_{\mathrm{Orb}_{SO(3)}(p)}$ weil $\partial_t\, r(x(t)) = 0$ für $x(t) \in \mathrm{Orb}_{SO(3)} \Longrightarrow h_{ij}(x^u)\, dx_a^i\, dx_b^j = g^2(r)\, dr_a\, dr_b + r^2 \Omega_{ab} \Longrightarrow$ $g_{ab} = -f^2(r)\, dt_a\, dt_b + g^2(r)\, dr_a\, dr_b + r^2 \Omega_{ab}$

Krümmung der Schwarzschild-Geometrie

$g_{ab} = -f^2(r)\,dt_a\,dt_b + g^2(r)\,dr_a\,dr_b + r^2\Omega_{ab} \overset{!}{=} \eta_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b \ldots (1)$ $\Omega_{ab} = \underbrace{d\vartheta_a\,d\vartheta_b}_{(2a)} + \underbrace{\sin^2(\vartheta)\,d\varphi_a\,d\varphi_b}_{(2b)} \overset{!}{=} \delta_{ij} e^i_a e^i_b = \underbrace{e^\vartheta_a e^\vartheta_b}_{(3a)} + \underbrace{e^\varphi_a e^\varphi_b}_{(3b)}$

vgl. $(2a), (3a) \Longrightarrow e^\vartheta = d\vartheta \ldots (4a)$; vgl. $(2b), (3b) \Longrightarrow e^\varphi = \sin(\vartheta)\,d\varphi \ldots (4b)$; $\underset{d1=2}{de^\vartheta} \overset{(4a)}{=} \underset{d(d0=1)}{d(d\vartheta)} = \underset{d^2 0}{d^2\vartheta} = \underset{2}{0} \ldots (5a)$

$\underset{d1=2}{de^\varphi} \overset{(4b)}{=} \underset{d(\;\;0\;\;\;\;d0=1)}{d(\sin(\vartheta)\,d\varphi)} = \underset{d(\;\;0\;\;\;\;\;\;d0=1)}{d(\sin(\vartheta)\wedge d\varphi)}$ $\Big|$ $d(\underset{p}{\alpha}\wedge\underset{q}{\beta}) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta \Longrightarrow \underset{d1=2}{de^\varphi} = \underset{d0=1}{\overbrace{d\sin(\vartheta)}^{\nabla\sin(\vartheta)\,\nabla\vartheta}} \wedge \underset{d0=1}{d\varphi} + \overbrace{(-1)^0}^{=1}\underset{0}{\sin(\vartheta)} \wedge \underset{d^2 0=2}{\overbrace{d^2\varphi}^{=0}}$

$\underset{d1=2}{de^\varphi} = \nabla\underset{0}{\sin(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{\nabla\vartheta}\wedge\underset{d0=1}{d\varphi} = \underset{0}{\cos(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{d\vartheta}\wedge\underset{d0=1}{d\varphi}$ $\Big|$ $d\vartheta\wedge d\varphi = -d\varphi\wedge d\vartheta \Longrightarrow \underset{d1=2}{de^\varphi} = -\underset{0}{\cos(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{d\varphi}\wedge\underset{d0=1}{d\vartheta} \ldots (5b)$

Cartan 1: $\underset{d1=2}{de^\vartheta} = -\underset{1}{\omega^\vartheta{}_\mu}\wedge\underset{1}{e^\mu} = -\underset{1}{\omega^\vartheta{}_\vartheta}\wedge\underset{1}{e^\vartheta} - \underset{1}{\omega^\vartheta{}_\varphi}\wedge\underset{1}{e^\varphi}$ $\Big|$ $\omega^\vartheta{}_\vartheta = -\omega^\vartheta{}_\vartheta \Longrightarrow \omega^\vartheta{}_\vartheta = 0 \Longrightarrow \underset{d1=2}{de^\vartheta} = -\underset{1}{\omega^\vartheta{}_\varphi}\wedge\underset{1}{e^\varphi}$ $\Big|$ $\omega^\vartheta{}_\varphi = -\omega^\varphi{}_\vartheta \Longrightarrow$

$\underset{d1=2}{de^\vartheta} = \underset{1}{\omega^\varphi{}_\vartheta}\wedge\underset{1}{e^\varphi} \ldots (6a)$ Cartan 1: $\underset{d1=2}{de^\varphi} = -\underset{1}{\omega^\varphi{}_\mu}\wedge\underset{1}{e^\mu} = -\underset{1}{\omega^\varphi{}_\vartheta}\wedge\underset{1}{e^\vartheta} - \underset{1}{\omega^\varphi{}_\varphi}\wedge\underset{1}{e^\varphi}$ $\Big|$ $\omega^\varphi{}_\varphi = -\omega^\varphi{}_\varphi \Longrightarrow \omega^\varphi{}_\varphi = 0 \Longrightarrow \underset{d1=2}{de^\varphi} = -\underset{1}{\omega^\varphi{}_\vartheta}\wedge\underset{1}{e^\vartheta} \overset{(4a)}{\Longrightarrow}$

$\boxed{\underset{d1=2}{de^\varphi} = -\underset{1}{\omega^\varphi{}_\vartheta}\wedge\underset{d0=1}{d\vartheta}} \overset{vgl\,(5b)}{\Longrightarrow} \underset{1}{\omega^\varphi{}_\vartheta} = \underset{0}{\cos(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{d\varphi} \ldots (7a) \overset{(6a)}{\Longrightarrow} \underset{d1=2}{de^\vartheta} = \underset{0}{\cos(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{d\varphi}\wedge\underset{1}{e^\varphi} \overset{(4b)}{\Longrightarrow} \boxed{\underset{d1=2}{de^\vartheta} = \underset{0}{\cos(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{d\varphi}\wedge\underset{0}{\sin(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{d\varphi} \overset{(5a)}{=} \underset{2}{0}}$

Cartan2: $\underset{2}{R^i{}_j} = \underset{d1=2}{d\omega^i{}_j} + \underset{1}{\omega^i{}_k}\wedge\underset{1}{\omega^k{}_j} \overset{i\widehat{=}\vartheta,j\widehat{=}\varphi}{\Longrightarrow} \underset{2}{R^\vartheta{}_\varphi} = \underset{d1=2}{d\omega^\vartheta{}_\varphi} + \underset{1}{\omega^\vartheta{}_k}\wedge\underset{1}{\omega^k{}_\varphi} = \underset{d1=2}{d\omega^\vartheta{}_\varphi} + \underset{1}{\overbrace{\omega^\vartheta{}_\vartheta}^{=0}}\wedge\underset{1}{\omega^\vartheta{}_\varphi} + \underset{1}{\omega^\vartheta{}_\varphi}\wedge\underset{1}{\overbrace{\omega^\varphi{}_\varphi}^{=0}} \Longrightarrow \underset{2}{R^\vartheta{}_\varphi} = \underset{d1=2}{d\omega^\vartheta{}_\varphi}$ $\Big|$ $\omega^\vartheta{}_\varphi = -\omega^\varphi{}_\vartheta$

$\underset{2}{R^\vartheta{}_\varphi} = -\underset{d1=2}{d\omega^\varphi{}_\vartheta} \overset{(7a)}{\Longrightarrow} \underset{2}{R^\vartheta{}_\varphi} = -\underset{d(\;\;0\;\;\;d0=1)}{d(\cos(\vartheta)\,d\varphi)} = -\underset{d(\;\;0\;\;\;\;\;d0=1)}{d(\cos(\vartheta)\wedge d\varphi)}$ $\Big|$ $d(\underset{p}{\alpha}\wedge\underset{q}{\beta}) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta$

$\underset{2}{R^\vartheta{}_\varphi} = -(\underset{d0=1}{\overbrace{d\cos(\vartheta)}^{\nabla\cos(\vartheta)\,\nabla\vartheta}}\wedge\underset{d0=1}{d\varphi} + \overbrace{(-1)^0}^{=1}\underset{0}{\cos(\vartheta)}\wedge\underset{d^2 0=2}{\overbrace{d^2\varphi}^{=0}}) \Longrightarrow \boxed{\underset{2}{R^\vartheta{}_\varphi} = \underset{0}{\sin(\vartheta)}\,\underset{d0=1}{d\vartheta}\wedge\underset{d0=1}{d\varphi}} \ldots (8)$

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie- SRT und Mathematische Grundlagen der ART

Allgemeines zur SRT

Newton	Beliebige Neigung der Weltlinien im Minkowskidiagramm möglich. Zeit ist global. Einheitliche (waagrechte) Gleichzeitebenen für alle Beobachter. Invariante Geschwindigkeit $v = \infty$
Newton BWGL und Einsteins Überlegungen	$F^i(x^m(t)) = m\,\ddot{x}^i(t)$ | im Gravitationspotential: $F^i = F_g^i(x^m(t)) = m\,g^i(x^m(t)) = -m\partial_i\,\Phi(x^m(t))$ $\Longrightarrow$ m kürzt sich weg! $\Longrightarrow$ Einstein: „Gravitation ist keine Kraft“. Kastenexperiment: Beobachter in geschlossenem, beschleunigtem Kasten kann nicht feststellen, ob er im Gravitationsfeld „ruht“, oder im freien Raum beschleunigt. Träge Masse = schwere Masse.
Einstein (SRT)	Maximale Neigung der Weltlinien: 45° (Lichtkegel). Keine globale Zeit. Gleichgeschwindigkeitskegel: Repräsentiert allg. alle Objekte, die sich vom Beobachter mit derselben Geschwindigkeit wegbewegen. Invariante: Lichtgeschwindigkeit, Punkte in der Raumzeit, Lichtkegel (LK). Zwei Punkte im LK können einander beeinflussen; ein Punkt im LK kann einen Punkt außerhalb des LK nicht beeinflussen. Zueinander ruhende Objekte werden durch parallele Weltlinien beschrieben. Relativitätsprinzip: Systeme, die sich gleichförmig zueinander bewegen sind äquivalent.
Konstruktion Gleichzeitebenen	Der Beobachter 1 und 2 sind zu $t = 0$ am selben Ort. Beobachter 1 sendet Licht aus → Lichtkegel. Beobachter 2 bewegt sich vom Beobachter 1 weg. Aber auch für Beobachter 2 bewegt sich die Photonen immer noch mit derselben Geschwindigkeit von ihm weg, egal, wie schnell er ist → Die Gleitzeitebenen von Beobachter 2 müssen sich neigen, sodass der invariante Lichtkegel an jedem Punkt der Weltlinie von Beobachter 2 nach „links und rechts“ im Minkowskidiagramm zu selben Zeit (im System von Beobachter 2) denselben Abstand hat
Gerade	Objekte bewegen sich in der gekrümmten Raumzeit auf Geraden. Eine Gerade ist auch im nicht-euklidischen Raum die „kürzeste Verbindung“ zwischen zwei Punkten („Geodizität“). Außerdem: Die Tangentenrichtung ist überall gleich („Autoparallelität“. Beispiel: Zwei Ameisen starten vom Äquator aus (normal dazu) Richtung Norden) und bewegen sich „autoparallel“. Nach jeder intefesimalen Verschiebung gilt eine neue Tangentenebene; die „bisherige“ Tangente muss mit der „neuen“ verglichen werden. Die Ameisen bewegen sich beide „geradlinig“ Richtung Nordpol und „spüren scheinbar eine Kraft“, die in Wahrheit nur aus der sphärischen Geometrie stammt.

Herleitung Lorenz-Transformation der SRT

Bedeutung „gestrichene“ und „ungestrichene“ Koordinaten	Wir legen (willkürlich) fest: Ungestrichenes System I ist „ruhend“ (der Beobachter ist hier), gestrichenes System $\bar{I}$ ist „bewegt“. Alle Beobachtungen die der „ruhende“ Beobachter macht, werden in „ungestrichenen“ Koordinaten (inkl. Zeit-Koordinate) ausgedrückt. Alle Beobachtungen die der „bewegte“ Beobachter macht, werden in „gestrichenen“ Koordinaten ausgedrückt. Beobachtet der „ruhende“ Beobachter das „bewegte“ System, so muss er erst die „gestrichenen“ Koordinaten in „ungestrichene“ transformieren.		
Allgemeines	Sei $\bar{I}$ das „bewegte“ System, I das „ruhende“ System und $\vec{v}$ (bzw. v^i) der Geschwindigkeitsvektor von $\bar{I}$ gegenüber I. Betrag und die Richtung von v^i bestimmen Größe und Vorzeichen der Transformationen.		
Voraussetzungen für Ansatz	(1) Invarianz gegenüber Rotationen (es gibt keine ausgezeichnete Richtung) (2) Einzig „doch“ ausgezeichnete Richtung (aufgrund des Experiments): Richtung des Geschwindigkeitsvektors v^i (3) Lineare Transformation (Linien werden auf Linien abgebildet) (4) Universelle Transformation: Es muss egal sein, welches System das „gestrichene“ ist, und welches nicht (selbe Regeln für Hin- und Rücktransformation).		
Max. linearer Ansatz mit t und x^i	$\bar{t} = at + b_*^i x^i$ mit $a = a(v)$ (keine ausgez. Richtung, $v = \sqrt{v^k v^k}$) und $b_*^i = b(v)\,v^i$ (v^i einzig ausgez. Richtung) $\bar{x}^i = d_*^i t + h^{ij} x^j$ (mit $d_*^i = d(v)\,v^i$ (v^i einzig ausgez. Richtg) und $h^{ij} = e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j$ (v^i einzig ausgez. Richtg.)		
Ansatz Trafo $I \xrightarrow{v^i} \bar{I}$ ($c = 1$, passive LT)	$\bar{t} = a(v)\,t + b(v)\,v^i x^i \left(mit\ v = \sqrt{v^k v^k}\right)$ $\bar{x}^i = d(v)\,v^i t + e(v)\,x^i + f(v)\,v^i v^j x^j$	Umformung für Matrixdarstellung: einheitl. x^j	$\bar{t} = a(v)\,t + b(v)\,v^j x^j$ $\bar{x}^i = d(v)\,v^i t + e(v)\,\delta^{ij} x^j + f(v)\,v^i v^j x^j$
Ansatz Trafo $\bar{I} \xrightarrow{-v^i} I$ ($c = 1$, aktive LT)	$t = a(v)\,\bar{t} - b(v)\,v^i \bar{x}^i \left(mit\ v = \sqrt{v^k v^k}\right)$ $x^i = -\,d(v)\,v^i \bar{t} + e(v)\,\bar{x}^i + f(v)\,v^i v^j \bar{x}^j$	Umformung für Matrixdarstellung: einheitl. x^j	$\bar{t} = a(v)\,t - b(v)\,v^j x^j$ $\bar{x}^i = -\,d(v)\,v^i t + e(v)\,\delta^{ij} x^j + f(v)\,v^i v^j x^j$
Matrix $\bar{\Lambda}^{ij} : I \xrightarrow{v^i} \bar{I}$ $\bar{a}^i = \bar{\Lambda}^{ij} a^j$	$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x^j \end{pmatrix}$	Matrix $\Lambda^{ij} : \bar{I} \xrightarrow{-v^i} I$ $a^i = \Lambda^{ij} \bar{a}^j$	$\begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & -\,b(v)\,v^j \\ -d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^j \end{pmatrix}$
Matrix $\bar{\Lambda}^{ij} : I \xrightarrow{v^i} \bar{I}$ „ausgeschrieben“	$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\cdot v^1 & b(v)\cdot v^2 & b(v)\cdot v^3 \\ d(v)\,v^1 & e(v) + f(v)\,v^1 v^1 & f(v)\,v^1 v^2 & f(v)\,v^1 v^3 \\ d(v)\,v^2 & f(v)\,v^2 v^1 & e(v) + f(v)\,v^2 v^2 & f(v)\,v^2 v^3 \\ d(v)\,v^3 & f(v)\,v^3 v^1 & f(v)\,v^3 v^2 & e(v) + f(v)\,v^3 v^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{t} \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$		
Weil universell: Trafo=Rücktrafo	$I \xrightarrow{v^i} \bar{I} \xrightarrow{-v^i} I \Longrightarrow \Lambda^{ki} \bar{\Lambda}^{ij} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0^j \\ 0^k & \delta^{kj} \end{pmatrix}$	Indexumbenennung $\Lambda^{ij} \to \Lambda^{ki} \Longrightarrow \begin{matrix} i \to k \\ j \to i \end{matrix}$	$\Lambda^{ki} = \begin{pmatrix} a(v) & -\,b(v)\,v^i \\ -\,d(v)\,v^k & e(v)\,\delta^{ki} + f(v)\,v^k v^i \end{pmatrix}$
Matrixansatz	$\Lambda^{ki} \bar{\Lambda}^{ij} \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a(v) & -\,b(v)\,v^i \\ -\,d(v)\,v^k & e(v)\,\delta^{ki} + f(v)\,v^k v^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij} + f(v)\,v^i v^j \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0^j \\ 0^k & \delta^{kj} \end{pmatrix}$		

Aus Matrix-ansatz extra-hierte Gleichun-gen

l.o.: $a^2 - bdv^2 = 1$ ... (1)

r.o.: $abv^j - bv^i(e\delta^{ij} + fv^iv^j) = abv^j - bev^j - bfv^iv^iv^j = (ab - be - bfv^2)v^j = 0^j \Rightarrow ab - be - bfv^2 = 0$ ... (2)

l.u.: $-adv^k + (e\delta^{ki} + fv^kv^i)dv^i = -adv^k + dev^k + dfv^iv^iv^k = d(-a+e+fv^2)v^k = 0^k \Rightarrow \underline{d(-a+e+fv^2) = 0}$ ... (3)

r.u.: $-bdv^jv^k + (e\delta^{ki}+fv^kv^i)(e\delta^{ij}+fv^iv^j) = -bdv^jv^k + e^2\delta^{ki}\delta^{ij} + ef\delta^{ki}v^iv^j + ef\delta^{ij}v^kv^i + f^2v^kv^iv^iv^j = \delta^{jk}$

$-bdv^jv^k + e^2\delta^{jk} + efv^jv^k + efv^jv^k + f^2v^2v^jv^k = \underline{e^2\delta^{jk} + (-bd+ef+ef+f^2v^2)v^jv^k = \delta^{jk}}$ ... (4) $\Rightarrow$

(4) geht nur, wenn $(-bd+ef+ef+f^2v^2)v^jv^k = 0^{jk} \Rightarrow \underline{-bd+ef+ef+f^2v^2 = 0}$ ... (5)

(5) in (4) $\Rightarrow e^2\delta^{jk} = \delta^{jk} \Rightarrow e(v) = \pm 1$; aber bei $v^i = 0^i$ muss gelten $\bar{x}^i = x^i$; $\Rightarrow$der Ansatz lautet aber:

$\bar{x}^i = d(v)\,v^it + e(v)\,x^i + f(v)\,v^i(v^jx^j) \Rightarrow e(0) = +1 \Rightarrow$ Unstetigkeit vermeiden $\Rightarrow \boxed{e=1}$ ... (6)

(6) in (1), (2), (3), (5)

$\underline{a^2 - bdv^2 = 1}$ ... (7)

$\underline{b(a-1-fv^2)=0}$ ... (8)

$\underline{d(1-a+fv^2)=0}$ ... (9)

$\underline{-bd+2f+f^2v^2=0}$ ... (10)

(8) $\Rightarrow a-1-fv^2=0 \Rightarrow \boxed{f=\frac{a-1}{v^2}}$ ... (11)

Betrachten nun von I ein Objekt, das sich mit Ursprung von $\bar I$ mitbewegt (also in $\bar I$ in Ruhe ist) Trafo $I \xrightarrow{v^i} \bar I$:

$$\begin{pmatrix}\bar t\\ \bar x^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij}+f(v)\,v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\\ x^j\end{pmatrix} \Bigg| \begin{matrix} x^j = v^jt \\ \bar x^i = 0^i \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\bar t\\ 0^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & b(v)\,v^j \\ d(v)\,v^i & e(v)\,\delta^{ij}+f(v)\,v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\\ v^jt\end{pmatrix} \Rightarrow$$

unten: $0^i = dv^it + (e\delta^{ij}+fv^iv^j)v^jt = dv^it + e\delta^{ij}v^jt + fv^iv^jv^jt = dv^it + ev^it + fv^2v^it = v^it(d+e+fv^2) \overset{(6)}{\Rightarrow}$

$0^i = v^it(d+1+fv^2) \Rightarrow d+1+fv^2=0 \Rightarrow d = -1-fv^2 \overset{(11)}{\Rightarrow} d = -1 - \frac{a-1}{v^2}v^2 = -1-a+1 \Rightarrow \boxed{d=-a}$ ... (12) $\overset{(7)}{\Rightarrow}$

$a^2 + abv^2 = 1 \Rightarrow abv^2 = 1-a^2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1-a^2}{av^2}}$ ... (13)

(6), (11), (12), (13) in Matrix

$$\bar\Lambda^{ij} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av^2}v^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2}v^iv^j\end{pmatrix} \Bigg| \begin{matrix} v^i = ve^i \\ v^j = ve^j \end{matrix} \Rightarrow \bar\Lambda^{ij} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av}e^j \\ -ave^i & \delta^{ij}+(a-1)e^ie^j\end{pmatrix}$$

Transitivität: $I \xrightarrow{ue^i} \bar I \xrightarrow{ve^i} \bar{\bar I} \Leftrightarrow I \xrightarrow{we^i} \bar{\bar I} \Rightarrow \boxed{\bar\Lambda(v)^{ij}\,\bar\Lambda(u)^{jk} = \bar\Lambda(w)^{ik}}$ ... (14)

Umbenennungen

$$\bar\Lambda^{ij} \to \bar\Lambda^{jk} \Rightarrow \begin{matrix} i \to j \\ j \to k \\ v \to u \end{matrix} \quad \bar\Lambda^{jk} = \begin{pmatrix} a_u & \frac{1-a_u^2}{a_uu}e^k \\ -a_uue^j & \delta^{jk}+(a_u-1)e^je^k\end{pmatrix} \quad \bar\Lambda^{ij} \to \bar\Lambda^{ik} \Rightarrow \begin{matrix} j \to k \\ v \to w \end{matrix} \quad \bar\Lambda^{ik} = \begin{pmatrix} a_w & \frac{1-a_w^2}{a_ww}e^k \\ -a_wwe^i & \delta^{ik}+(a_w-1)e^ie^k\end{pmatrix}$$

Einsetzen in (14)

$$\begin{pmatrix} a_v & \frac{1-a_v^2}{a_vv}e^j \\ -a_vve^i & \delta^{ij}+(a_v-1)e^ie^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_u & \frac{1-a_u^2}{a_uu}e^k \\ -a_uue^j & \delta^{jk}+(a_u-1)e^je^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_w & \frac{1-a_w^2}{a_ww}e^k \\ -a_wwe^i & \delta^{ik}+(a_w-1)e^ie^k\end{pmatrix}$$

Aus Matrixansatz extrahierte Gleichungen

l. o.: $\underline{a_ua_v - a_uu\frac{1-a_v^2}{a_vv}e^je^j = a_w}$ ... (15)

r.u.: $-a_vv\frac{1-a_u^2}{a_uu}e^ie^k + [\delta^{ij}+(a_v-1)e^ie^j][\delta^{jk}+(a_u-1)e^je^k] = \delta^{ik}+(a_w-1)e^ie^k \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u^2}{a_uu}e^ie^k + \delta^{ik} + \delta^{ij}(a_u-1)e^je^k + \delta^{jk}(a_v-1)e^ie^j + (a_v-1)(a_u-1)e^ie^k = \delta^{ik} + (a_w-1)e^ie^k \,|-\delta^{ik} \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u^2}{a_uu}e^ie^k + \delta^{ij}(a_u-1)e^je^k + \delta^{jk}(a_v-1)e^ie^j + (a_v-1)(a_u-1)e^ie^k = (a_w-1)e^ie^k$

$-a_vv\frac{1-a_u^2}{a_uu}e^ie^k + (a_u-1)e^ie^k + (a_v-1)e^ie^k + (a_v-1)(a_u-1)e^ie^k = (a_w-1)e^ie^k \,|:(e^ie^k) \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u^2}{a_uu} + (a_u-1)+(a_v-1)+(a_v-1)(a_u-1) = a_w-1 \Rightarrow$

$-a_vv\frac{1-a_u^2}{a_uu} + a_u - 1 + a_v - 1 + a_ua_v - a_v - a_u + 1 = a_w - 1 \Rightarrow$

$-\frac{a_vv}{a_uu}(1-a_u^2) - 1 + a_ua_v = a_w - 1 \Rightarrow \underline{a_w = -\frac{a_vv}{a_uu}(1-a_u^2)+a_ua_v}$ ... (16) $\overset{(15)}{\Rightarrow}$

$a_ua_v - a_uu\frac{1-a_v^2}{a_vv} = -\frac{a_vv}{a_uu}(1-a_u^2) + a_ua_v \,|-a_ua_v \Rightarrow$

$-a_uu\frac{1-a_v^2}{a_vv} = -\frac{a_vv}{a_uu}(1-a_u^2) \,\Big|\cdot\frac{1}{a_uu} \Rightarrow -\frac{1-a_v^2}{a_vv} = -\frac{a_vv}{a_u^2u^2}(1-a_u^2) \,\Big|\cdot\frac{1}{a_vv} \Rightarrow$

$\frac{a_v^2-1}{a_v^2v^2} = \frac{a_u^2-1}{a_u^2u^2} \,\Big|\, \forall u,v \Rightarrow \boxed{\frac{a_v^2-1}{a_v^2v^2} = k = const}$ ... (17)

$a_v^2 - 1 = a_v^2v^2k \Rightarrow a_v^2 - a_v^2v^2k = 1 \Rightarrow a_v^2(1-kv^2) = 1 \Rightarrow a_v^2 = \frac{1}{1-Kv^2} \Rightarrow \boxed{a_v = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}}$ ... (18)

Bestimmung von K: Was sich in einem BZ mit c bewegt, bewegt sich auch im anderen BZ mit c (Invarianz von c)

(17) $\Rightarrow k = \frac{a^2-1}{a^2v^2} \Rightarrow -k = \frac{1}{a}\frac{1-a^2}{av^2} \overset{(13)}{\Rightarrow} -k = \frac{1}{a}b \Rightarrow \underline{b = -ka}$ ... (19)

$$\begin{pmatrix}\bar t\\ \bar x^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av^2}v^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2}v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\\ x^j\end{pmatrix} \Bigg| \text{(17)} \Rightarrow k = \frac{a^2-1}{a^2v^2} \Rightarrow -k = \frac{1}{a}\frac{1-a^2}{av^2} \Rightarrow \frac{1-a^2}{av^2} = -ka$$

$$\begin{pmatrix}\bar t\\ \bar x^i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -kav^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2}v^iv^j\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\\ x^j\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\bar t = at - kax^jv^j = at - ka(\vec x\cdot\vec v) \Rightarrow \underline{\bar t^2 = a^2t^2 - 2ka^2t(\vec x\cdot\vec v) + k^2a^2(\vec x\cdot\vec v)^2}$ ... (20)

$\bar x^i = -atv^i + \delta^{ij}x^j + \frac{a-1}{v^2}v^iv^jx^j = -atv^i + x^i + \frac{a-1}{v^2}v^i(v^jx^j) \Rightarrow \vec{\bar x} = (-at\vec v + \vec x) + \frac{a-1}{v^2}(\vec v\cdot\vec x)\vec v \Rightarrow$

$\bar x^i\bar x^i = (-at\vec v + \vec x)^2 + 2(-at\vec v+\vec x)\frac{a-1}{v^2}(\vec v\cdot\vec x)\vec v + \frac{(a-1)^2}{v^4}(\vec v\cdot\vec x)^2\vec v^2$

$\bar x^i\bar x^i = a^2t^2\vec v^2 - 2at(\vec v\cdot\vec x) + \vec x^2 + 2(-at\vec v^2 + \vec v\cdot\vec x)\frac{a-1}{v^2}(\vec v\cdot\vec x) + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec v\cdot\vec x)^2$

$\bar x^i\bar x^i = a^2t^2\vec v^2 - 2at(\vec v\cdot\vec x) + \vec x^2 - 2at\vec v^2\frac{a-1}{v^2}(\vec v\cdot\vec x) + 2(\vec v\cdot\vec x)\frac{a-1}{v^2}(\vec v\cdot\vec x) + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec v\cdot\vec x)^2$

$\underline{\bar x^i\bar x^i = a^2t^2\vec v^2 - 2at(\vec v\cdot\vec x) + \vec x^2 - 2at(a-1)(\vec v\cdot\vec x) + 2\frac{a-1}{v^2}(\vec v\cdot\vec x)^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec v\cdot\vec x)^2}$ ... (21)

Fortsetzung:	Die Front eines Lichtblitzes, der zum Zeitpunkt $t = 0$ im Ursprung von I ausgelöst wird, ist eine Kugel im Raum mit Radius ct: $x^i x^i \overset{!}{=} (ct)^2 \,\Big\vert\, c \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow \underline{x^i x^i = t^2}$ ... (22) Dasselbe gilt aber auch im System $\bar{I}$ (Invarianz der Lichtgeschwindigkeit): $\bar{x}^i \bar{x}^i \overset{!}{=} (c\bar{t})^2 \,\Big\vert\, c \overset{!}{=} 1 \Longrightarrow \underline{\bar{x}^i \bar{x}^i = \bar{t}^2} \xrightarrow{(20),(21)}$ $t^2 a^2 \vec{v}^2 - 2at(\vec{v}\cdot\vec{x}) + \vec{x}^2 - 2at(a-1)(\vec{v}\cdot\vec{x}) + 2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2 = t^2 a^2 - 2ka^2 t(\vec{x}\cdot\vec{v}) + k^2 a^2 (\vec{x}\cdot\vec{v})^2 \overset{(22)}{\Longrightarrow}$ $t^2 a^2 \vec{v}^2 - 2at(\vec{v}\cdot\vec{x}) + t^2 - 2at(a-1)(\vec{v}\cdot\vec{x}) + 2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2 = t^2 a^2 - 2ka^2 t(\vec{x}\cdot\vec{v}) + k^2 a^2 (\vec{x}\cdot\vec{v})^2$ **KV. t^2**: $a^2\vec{v}^2 + 1 = a^2 \Longrightarrow a^2 - a^2\vec{v}^2 = 1 \Longrightarrow a^2(1-\vec{v}^2) = 1 \Longrightarrow 1 - \vec{v}^2 = \frac{1}{a^2} \overset{(18)}{\Longrightarrow} 1 - \vec{v}^2 = 1 - kv^2 \Longrightarrow \boxed{k = 1}$ ... (23) **KV. t^1**: $-2a(\vec{v}\cdot\vec{x}) - 2a(a-1)(\vec{v}\cdot\vec{x}) = -2ka^2(\vec{x}\cdot\vec{v}) \Longrightarrow -2a(\vec{v}\cdot\vec{x}) - 2a^2(\vec{v}\cdot\vec{x}) + 2a(\vec{v}\cdot\vec{x}) = -2ka^2(\vec{x}\cdot\vec{v}) \Longrightarrow$ $-2a^2(\vec{v}\cdot\vec{x}) = -2ka^2(\vec{x}\cdot\vec{v}) \Longrightarrow \boxed{k = 1}$ **KV. t^0**: $2\frac{a-1}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2 + \frac{(a-1)^2}{v^2}(\vec{v}\cdot\vec{x})^2 = k^2 a^2 (\vec{x}\cdot\vec{v})^2 \Longrightarrow \frac{(\vec{v}\cdot\vec{x})^2}{v^2}(2a - 2 + a^2 - 2a + 1) = k^2 a^2 (\vec{x}\cdot\vec{v})^2 \Longrightarrow$ $\frac{1}{v^2}(a^2 - 1) = k^2 a^2 \Longrightarrow \frac{a^2-1}{a^2 v^2} = k^2 \overset{(17)}{=} k \Longrightarrow \boxed{k = 1}$ K ist 1/c² und definiert die invariante Geschwindigkeit (Grenzgeschwindigkeit); ist hier 1, weil c bereits in der Def. von t steckt.
Endergebnis Trafo $I \overset{v^i}{\rightarrow} \bar{I}$	$a = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}} \mathrel{\widehat{=}} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma;\; v^i = \frac{v^i}{1} \mathrel{\widehat{=}} \frac{v^i}{c} = \beta^i;\; {}^{*}\frac{1-\gamma^2}{\gamma\beta^2} = \frac{1-\frac{1}{1-\beta^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta^2} = \frac{\frac{1-\beta^2-1}{1-\beta^2}}{\frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{-\sqrt{1-\beta^2}\beta^2}{(1-\beta^2)\beta^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\gamma \Longrightarrow$ $\bar{\Lambda}^{ij} = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{av^2}v^j \\ -av^i & \delta^{ij} + \frac{a-1}{v^2}v^i v^j \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \gamma & \frac{1-\gamma^2}{\gamma\beta^2}^{*}\beta^j \\ -\gamma\beta^i & \delta^{ij} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^i\beta^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^j \\ -\gamma\beta^i & \delta^{ij} + (\gamma-1)\frac{\beta^i\beta^j}{\beta^2} \end{pmatrix}$
„ausge-schriebene“ LT-Matrix für Trafo $I \overset{v^i}{\rightarrow} \bar{I}$	$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_x}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_x}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_y}{\beta^2} & 1 + (\gamma-1)\frac{\beta_z\beta_z}{\beta^2} \end{pmatrix}$
Minkowsi-Metrik	$\left.\begin{matrix} x^i x^i = t^2 \Longrightarrow -t^2 + x^i x^i = 0 \\ \bar{x}^i \bar{x}^i = \bar{t}^2 \Longrightarrow -\bar{t}^2 + \bar{x}^i \bar{x}^i = 0 \end{matrix}\right\} -t^2 + x^i x^i = -\bar{t}^2 + \bar{x}^i \bar{x}^i$ invar. $\Longleftrightarrow x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x^i \end{pmatrix};\; \bar{x}^\mu = \begin{pmatrix} \bar{t} \\ \bar{x}^i \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu \\ \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \end{matrix}$ Abstandquadrat $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ... Invariant für alle Inertialsysteme unter LT
Zusammen-fassung der Herleitung	• Ansatz linear in t und x^i, rotationsinvariant, universell. Einzige bevorzugte Richtung: Richtung von v^i. • Index von x^i, x^j auf x^j angleichen und GLSYS als Matrix/Vektor-Gleichung anschreiben • Trafo-Matrix $\bar{\Lambda}^{ij}: I \overset{v^i}{\rightarrow} \bar{I}$ mit pos. Vorzeichen, Trafo-Matrix $\Lambda^{ij}: \bar{I} \xrightarrow{-v^i} I$ mit neg. Vorzeichen im ersten und dritten Quadranten • Weil universell: $I \overset{v^i}{\rightarrow} \bar{I} \xrightarrow{-v^i} I \Longrightarrow \Lambda^{ki}\bar{\Lambda}^{ij} \overset{!}{=} \mathbb{1} \Longrightarrow$ Um das anschreiben zu können, Indexumbenennung $\Lambda^{ij} \rightarrow \Lambda^{ki}$ • Vier Gleichungen; Gleichung **r.u.**: $e^2\delta^{jk} + (-bd + ef + ef + f^2v^2)v^j v^k = \delta^{jk} \Longrightarrow -bd + ef + ef + f^2v^2 = 0$ und $e^2\delta^{jk} = \delta^{jk} \Longrightarrow e = \pm 1$ • Bei $v^i = 0^i$ muss aber gelten $\bar{x}^i = x^i$, wegen Ansatz $\Longrightarrow e(0) = +1 \Longrightarrow$ Unstetigkeit vermeiden $\Longrightarrow e = 1$ (überall) • $e = 1$ einsetzen in andere Gleichungen, vier neue Gleichungen $\Longrightarrow f = \frac{a-1}{v^2}$ • Betrachten nun aus I ein Objekt, das sich mit Ursprung von $\bar{I}$ mitbewegt $\Longrightarrow$ Trafo $I \overset{v^i}{\rightarrow} \bar{I}$ mit $x^j = v^j t$ und $\bar{x}^i = 0^i$ • Gleichung **unten**: $d = -a$; einsetzen in $a^2 - bdv^2 = 1 \Longrightarrow b = \frac{1-a^2}{av^2}$ • Neue Trafo-Matrix, in der nur mehr a vorkommt. • Transitivität: $I \xrightarrow{ue^i} \bar{I} \xrightarrow{ve^i} \bar{\bar{I}} \Leftrightarrow I \xrightarrow{we^i} \bar{\bar{I}} \Longrightarrow \bar{\Lambda}(v)^{ij}\,\bar{\Lambda}(u)^{jk} = \bar{\Lambda}(w)^{ik}$; Indexumbenennungen $\bar{\Lambda}(v)^{ij} \rightarrow \bar{\Lambda}(u)^{jk}$; $\bar{\Lambda}(v)^{ij} \rightarrow \bar{\Lambda}(w)^{ik}$ • Gleichung **l.o.** und **r.u.** nach a_w auflösen, gleichsetzen $\Longrightarrow \frac{{a_v}^2-1}{{a_v}^2 v^2} = \frac{{a_u}^2-1}{{a_u}^2 u^2} \,\Big\vert\, \forall u, v \Longrightarrow \frac{{a_v}^2-1}{{a_v}^2 v^2} = k = const.$ • In Trafo-Matrix $\bar{\Lambda}^{ij}$, in der nur mehr a vorkommt, **r.o.** $\frac{1-a^2}{av^2}$ ersetzen durch $-ka$ • Trafo-Gleichungen aufstellen und quadrieren ($\bar{t}^2 = \cdots, \bar{x}^i\bar{x}^i = \cdots$). • Invarianz von c: $x^i x^i \overset{!}{=} (ct)^2 = t^2;\; \bar{x}^i \bar{x}^i \overset{!}{=} (c\bar{t})^2 = \bar{t}^2 \Longrightarrow x^i x^i = \bar{x}^i \bar{x}^i \Longrightarrow$ einsetzen $\Longrightarrow$ KV bei t^2 bzw $t^1 \Longrightarrow k = 1$.

Vektorräume

Vektorraum	Man nennt (V,Γ) einen Vektorraum V über den Skalarkörper Γ (z.B. $\mathbb{R},\mathbb{C}$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: $\exists$ Vektoradditionsoperator $+: u, v \in V \to (v+w) \in V$ („abgeschlossen in Bezug auf Vektoraddition"), so dass gilt: V1: Assoziativgesetz: $\forall u, v, w \in V: u + (v + w) = (u + v) + w$ V2: $\exists$ neutrales Vektorelement $\exists \vec{0} \in V: \forall v \in V: v + \vec{0} = \vec{0} + v$ V3: $\exists$ inverses Vektorelement $\forall v \in V\ \exists (-v) \in V: v + (-v) = \vec{0}$ V4: Kommutativgesetz: $\forall v, w \in V: v + w = w + v$ $\exists$ Multiplikationsoperator $\cdot: \lambda \in \Gamma,\ v \in V \to (\lambda \cdot v) \in V$ („abgeschlossen in Bezug auf Skalarmultiplikation"), so dass gilt: S1 assoziativ: $\forall \lambda \in \Gamma,\ \forall v, w \in V: \lambda \cdot (v + w) = \lambda v + \lambda w$ (linear) S2 distributiv: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$ S3: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ S4: neutrales Element 1: $\forall v \in V: 1 \cdot v = v$ $\Longrightarrow 0 \cdot v = \vec{0}$. Bew.: $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v \overset{S2}{\Rightarrow} 0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v \xRightarrow{\text{Kürzen wegen V3 erlaubt}} 0 \cdot v = \vec{0}$ ■
Lineare Unabhängigkeit: Definition und Beweis Eindeutigkeit von $\lambda^\alpha v_\alpha$	• Die Vektoren $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ sind dann und nur dann LU, wenn gilt: $\lambda^\alpha v_\alpha = \vec{0} \Longrightarrow \forall \alpha \in I: \lambda^\alpha = 0$. • Die Darstellung $v = \lambda^\alpha v_\alpha$ ist eindeutig. ○ Bew.: Annahme: sei $v = \lambda^\alpha v_\alpha = \mu^\alpha v_\alpha \Longrightarrow \lambda^\alpha v_\alpha - \mu^\alpha v_\alpha = \vec{0} \Longrightarrow (\lambda^\alpha - \mu^\alpha) v_\alpha = \vec{0} \xRightarrow{v_\alpha\ LU} \alpha \in I: \lambda^\alpha - \mu^\alpha = 0 \Longrightarrow$ $\forall \alpha \in I: \lambda^\alpha = \mu^\alpha$ ■ • Wir suchen ein „maximales" LU-System (d.h. es kann kein LU Vektor mehr hinzugefügt werden)
Teilgeordnete Menge	$(A, \leq)$ ist eine teilgeordnete Menge, wenn gilt: (1) $\forall a \in A: a \leq a$, (2) $a, b \in A: a \leq b \wedge b \leq a \Longrightarrow a = b$, (3) $a, b, c \in A: a \leq b \wedge b \leq c \Longrightarrow a \leq c$ Beispiel: Potenzmenge („Menge aller Teilmengen") $A = \mathrm{P}(x) = \{T: T \subseteq x\}$; $T_1, T_2 \in A$; $T_1 \leq T_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} T_1 \subseteq T_2$ (1) $\forall T \in A: T \subseteq T$ ✓, (2) $T_1, T_2 \in A: T_1 \subseteq T_2 \wedge T_2 \subseteq T_1 \Longrightarrow T_1 = T_2$ ✓, (3) $T_1, T_2, T_3 \in A: T_1 \subseteq T_2 \wedge T_2 \subseteq T_3 \Longrightarrow T_1 \subseteq T_3$ ✓ Aber: echt überschneidende Teilmengen $T_1 \nsubseteq T_2$ von $\mathrm{P}(x)$ können <u>nicht</u> verglichen werden!
Kette	$K \subseteq (A, \leq)$ heißt Kette, wenn <u>jedes</u> Paar von Elementen aus K vergleichbar ist: $\forall a, b \in K: a \leq b \vee b \leq a$
Lemma von Zorn	Eine teilgeordnete Menge $(A, \leq)$, <u>in der jede Kette eine obere Schranke hat</u>, d.h. $\forall K \subseteq A\ \exists s \in A: t \leq s\ \forall t \in K$*, enthält mindestens ein maximales Element $m \in A$ für dass es kein größeres Element in A gibt. *Äquivalent zu Auswahlaxiom: „Wenn ich bei einer Menge von Mengen aus jeder Menge ein Element auswähle, bekomme ich wieder eine Menge".* *Die obere Schranke muss nicht unbedingt Teil von K sein, z.B. wenn $K = \{k: 0 \leq k < m: 0 < m \leq 1\}$
Anwendung Lemma von Zorn: Zeige, dass es in einem endlichdimensionalen Vektorraum eine max. Anzahl LU Vektoren gibt (Basis)	<u>z.Z.: $\exists$ eine maximale LU Teilmenge $M \subset (V, \Gamma)$ („Man kann keinen zu den Vektoren in M LU Vektor mehr hinzufügen").</u> Eine „LU Menge" ist eine Menge, die nur zueinander LU Vektoren beinhaltet. Sei $\mathcal{L} = \{L: L \subseteq (V, \Gamma) \wedge L\ ist\ LU\} \subset \mathrm{P}(V)$ (Menge aller LU Teilmengen L von V) Definition: $L_1 \leq L_2 \overset{def}{\Longleftrightarrow} L_1 \subseteq L_2$ • Sei $K \subset \mathcal{L}$ eine Kette in $\mathcal{L}$, d.h. $\forall L_i, L_j \in K: L_i \subseteq L_j \vee L_j \subseteq L_i$ • Sei L^* die Vereinigung aller Elemente L aus K: $L^* = \bigcup_{L \in K} L$. Offensichtlich gilt: $L_i \leq L^*\ \forall L_i \in K \Longrightarrow$ d.h. offensichtlich enthält L^* alle Elemente von K. • L^* ist aber nur dann obere Schranke von K, wenn $L^* \in \mathcal{L}$, d.h. nur wenn L^* LU ist. ○ <u>z.Z.:</u> $L^* \in \mathcal{L} \Leftrightarrow L^* = (v_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist LU $\Longrightarrow \lambda^\alpha v_\alpha = \lambda^{\alpha_1} v_{\alpha_1} + \dots + \lambda^{\alpha_n} v_{\alpha_n} = \vec{0} \Leftrightarrow \forall \lambda^{\alpha_i} = 0$ ○ Beachte: In einer LK dürfen nur <u>endlich viele λ^α</u> vorkommen. D.h.: Nur eine <u>endliche Anzahl $\lambda^{\alpha_1} \dots \lambda^{\alpha_n}$</u> sind (potentiell) überhaupt ungleich null $\Longrightarrow$wir betrachten nurmehr diese (endlich vielen) $\lambda^{\alpha_1} \dots \lambda^{\alpha_n}$ und $v_{\alpha_1} \dots v_{\alpha_n}$. ○ Jedes $v_\alpha \in L^*$, und $L^* = \bigcup_{L \in K} L \Longrightarrow$ jedes v_{α_i} ist Element mindestens eines $L_{\alpha_i} \in K$: $v_{\alpha_1} \in L_{\alpha_1} \in K, \dots, v_{\alpha_n} \in L_{\alpha_n} \in K$ ○ $\{L_{\alpha_1} \dots L_{\alpha_n}\}$ ist eine (endliche) Teilmenge der Kette K und ist daher selber eine Kette. ○ D.h: entweder ist $L_{\alpha_1} \subseteq L_{\alpha_2}$, dann ist nicht nur $v_{\alpha_2} \in L_{\alpha_2}$, sondern auch $v_{\alpha_1} \in L_{\alpha_2}$, oder es ist $L_{\alpha_2} \subseteq L_{\alpha_1}$, dann ist nicht nur $v_{\alpha_1} \in L_{\alpha_1}$, sondern auch $v_{\alpha_2} \in L_{\alpha_1}$; usw. $\Longrightarrow \exists$ obere Schranke $L_{\alpha*}$, die alle v_{α_i} beinhaltete und Teil dieser Kette ist. ○ (1) $v_{\alpha_1}, \dots, v_{\alpha_n} \in L_{\alpha*}$ ○ (2) $L_{\alpha*}$ ist LU (weil $L_{\alpha*} \in K \subseteq \mathcal{L} \Longrightarrow \lambda^\alpha v_\alpha = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda^\alpha = 0\ \forall \alpha \in I$ ○ aus (1) und (2) $\Longrightarrow L^*$ ist LU • $\Longrightarrow$für jedes $K \subset \mathcal{L}$ existiert eine obere Schranke L^* • $\Longrightarrow$Lemma von Zorn: $\exists$ eine „maximales Element" in $\mathcal{L}$; d.h. maximale LU Teilmenge $M \subset (V, \Gamma)$ (LU Basis)
Zeige, dass jeder Vektor mit dieser Basis erzeugt werden kann	z.Z.: $v \in V$ kann mit Basis $M = (E_\alpha)_{\alpha \in I}$ erzeugt werden (M ist ein Erzeugersystem). <u>Achtung:</u> E_α ist ein Vektor, kein Skalar. Daher ist α ist ein Zählindex („der wievielte Basisvektor"), kein Komponentenindex. trivialer Fall (1): $\{v\} \cup M = M \Leftrightarrow v \in M \Longrightarrow v = E_{\alpha 0} = 1 \cdot E_{\alpha 0} + 0 \cdot E_\alpha \Longrightarrow v \in \mathrm{span}(M)$ allg. Fall (2): $\{v\} \cup M \nsubseteq M \Longrightarrow$ Annahme: $v \notin \mathrm{span}(M) \Longrightarrow M' = M \cup \{v\}$, M ist aber maximal und LU $\Longrightarrow M'$ nicht mehr LU $\Longrightarrow$ mindestens ein $\lambda \neq 0$. $\Longrightarrow$ (i) Entweder sind ein oder mehrere $\lambda^\alpha \neq 0$, aber $\lambda = 0$. Dann wäre $\vec{0} = \lambda^\alpha E_\alpha$. Da M L.U. ist, müssen aber alle $\lambda^\alpha = 0$ sein. ↯ Widerspruch. (ii) Oder $\lambda \neq 0$, dann: $\vec{0} = \lambda v + \lambda^\alpha E_\alpha \Longrightarrow \lambda v = -\lambda^\alpha E_\alpha \Longrightarrow v = -\frac{\lambda^\alpha}{\lambda} E_\alpha \Longrightarrow v \in \mathrm{span}(M)$ ↯ zur Annahme $v \notin \mathrm{span}(M)$ $\Longrightarrow v \in \mathrm{span}(M)$.

Dualraum

Dualraum	Der Dualraum $V^{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi: V \to \Gamma: \varphi\ \mathit{ist\ linear}\}$ ist ein Vektorraum, mit allen linearen Abbildungen $\varphi: V \to \Gamma$ als Vektoren. Definition Vektoradditionsoperator: $(\varphi + \psi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) + \psi(v) \in \Gamma\ \forall\, v \in V$ Definition Multiplikationsoperator Skalar/Vektor: $(\lambda \cdot \varphi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\, \varphi(v) \in \Gamma\ \forall\, v \in V, \lambda \in \Gamma$
Prüfung Bedingungen $\Longrightarrow$ $V^{\sim}$ ist ein Vektorraum	(1) Beweise: $\{\varphi: V \to \Gamma\}$ ist ein Vektorraum (für beliebige φ) Vektoradditionsoperator (de facto ident mit dem skalaren Additionsoperator, daher ist V1 – V4 trivial): V1: Assoziativgesetz: $\forall \varphi, \psi, \chi \in V^{\sim}: \varphi(v) + (\psi(v) + \chi(v)) = (\varphi(v) + \psi(v)) + \chi(v)$ ✓ V2: $\exists$ neutrales Vektorelement (Funktion $\mathbb{0}(v) \to 0$) $\exists \mathbb{0} \in V^{\sim}: \forall \varphi \in V^{\sim}: \varphi(v) + \mathbb{0}(v) = \mathbb{0}(v) + \varphi(v)$ ✓ V3: $\exists$ inverses Vektorelement $\forall \varphi \in V^{\sim}\ \exists (-\varphi) \in V^{\sim}: \varphi(v) + (-\varphi(v)) = 0$ ✓ V4: Kommutativgesetz: $\forall \varphi, \psi \in V^{\sim}: (\varphi + \psi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v) + \psi(v) = \psi(v) + \varphi(v) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi + \varphi)(v)$ ✓ Multiplikationsoperator (de facto ident mit dem skalaren Multiplikationsoperator, daher ist S1– S4 trivial): S1: $\forall \lambda \in \Gamma,\ \forall \varphi, \psi \in V: \lambda \cdot (\varphi + \psi)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(\varphi(v) + \psi(v)) = \lambda \cdot \varphi(v) + \lambda \cdot \psi(v)$ ✓ S2: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: (\lambda + \mu) \cdot \varphi(v) = \lambda \cdot \varphi(v) + \mu \cdot \varphi(v)$ ✓ S3: $\forall \lambda, \mu \in \Gamma,\ \forall v \in V: \lambda \cdot (\mu \cdot \varphi(v)) = (\lambda\mu) \cdot \varphi(v)$ ✓ S4: neutrales Element 1: $\forall v \in V: 1 \cdot \varphi(v) = \varphi(v)$ ✓ (2) Beweise: $U = \{\varphi: V \to \Gamma: \varphi\ \mathit{linear}\}$ ist ein Unterraum von $\{\varphi: V \to \Gamma\}$, und daher auch ein (abgeschlossener) Vektorraum $\Longrightarrow$ z.Z: wenn $\varphi, \psi \in U$, d.h. φ, ψ linear, dann ist auch $(\varphi + \psi) \in U$, d.h. dann ist auch $(\varphi + \psi)$ linear $\Longrightarrow$ z.Z. wenn $\varphi, \psi \in U \Longrightarrow (\varphi + \psi)(v + w) = (\varphi + \psi)(v) + (\varphi + \psi)(w)$ und $(\varphi + \psi)(\lambda \cdot v) = \lambda\,(\varphi + \psi)(v)$. • $(\varphi + \psi)(v + w) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v + w) + \psi(v + w) \stackrel{\text{Lin.}}{=} (\varphi(v) + \varphi(w)) + (\psi(v) + \psi(w)) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi + \psi)(v) + (\varphi + \psi)(w)$ ■ • $(\varphi + \psi)(\lambda \cdot v) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\lambda \cdot v) + \psi(\lambda \cdot v) \stackrel{\text{Lin.}}{=} \lambda\, \varphi(v) + \lambda\, \psi(\lambda v) = \lambda(\varphi(v) + \psi(v)) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\,(\varphi + \psi)(v)$ ■ $\Longrightarrow$ Damit ist $U = \{\varphi: V \to \Gamma: \varphi\ \mathit{linear}\}$ ein Unterraum von $\{f: V \to \Gamma\}$ und somit ein Vektorraum
$\varphi(E_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha$ bestimmt φ Eindeutig	Sei $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Basis in V. Dann ist $\varphi(v)$ durch die Wirkung auf die Basisvektoren E_α eindeutig bestimmt: $\varphi(E_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\alpha \in \Gamma$ Beweis: (1) $\varphi(v) = \varphi(v^\alpha E_\alpha) \stackrel{\text{Lin.}}{=} v^\alpha\, \varphi(E_\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} v^\alpha \varphi_\alpha$; (2) $\varphi(v) = v^\alpha \varphi_\alpha \stackrel{\text{Ann.}}{=} v^\alpha \psi_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} v^\alpha\, \psi(E_\alpha) \stackrel{\text{Lin.}}{=} \psi(v^\alpha E_\alpha) = \psi(v)$ ■
Beispiele	$\varphi = (a, b, c);\ v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varphi_1 = \varphi(E_1) = (a, b, c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a;\ \varphi_2 = \varphi(E_2) = (a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b;\ \varphi_3 = \varphi(E_3) = (a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c$ $\varphi(v) = (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$ $\varphi(v^\alpha E_\alpha) = (a, b, c) \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (a, b, c) \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right] = (a, b, c) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$ $v^\alpha\, \varphi(E_\alpha) = x\,(a, b, c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\,(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\,(a, b, c) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xa + yb + zc$ $v^\alpha \varphi_\alpha = xa + yb + zc$
Duale Basis ist L.U.	Die duale Basis $(e^\alpha)_{\alpha \in I}$ ist definiert durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren des Vektorraums V: $e^\alpha(E_\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \delta^\alpha_\beta$ Die duale Basis ist LU. Beweis: $0 = \lambda_\alpha e^\alpha \vert E_\beta \Longrightarrow 0 = (\lambda_\alpha e^\alpha)(E_\beta) \stackrel{\text{Lin.}}{=} \lambda_\alpha\, e^\alpha(E_\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_\alpha \delta^\alpha_\beta = \lambda_\beta \Longrightarrow \forall \lambda_\beta = 0 \Longrightarrow (e^\alpha)_{\alpha \in I}$ ist LU ■
Beweis Beispiel:	Wähle $E_\beta = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \lambda_\alpha\, e^\alpha(E_\beta) = \lambda_1 (1{,}0{,}0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 (0{,}1{,}0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 (0{,}0{,}1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ (genauso für λ_2, λ_3)
Koeffizienten $\lambda_\beta = \varphi_\beta \Longrightarrow \varphi = \varphi_\beta e^\beta$	Jedes Element $\varphi \in V^{\sim}$ lässt sich als LK der Basisvektoren $(e^\beta)_{\beta \in I}$ darstellen, wobei (für endlichdimensionale Vektorräume) gilt: $\varphi = \lambda_\beta e^\beta = \varphi(E_\beta)\, e^\beta = \varphi_\beta e^\beta \Longrightarrow \boxed{\lambda_\beta = \varphi_\beta}$ Beweis 1: $\varphi(E_\alpha) = \varphi_\alpha = \varphi_\beta \delta^\beta_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_\beta \cdot e^\beta(E_\alpha) \stackrel{\text{endl.dim.}}{=} (\varphi_\beta e^\beta)(E_\alpha)$ ■ Beweis 2: $\varphi_\beta = \varphi(E_\beta) = (\lambda_\alpha e^\alpha)(E_\beta) \stackrel{\text{endl.dim.}}{=} \lambda_\alpha \cdot e^\alpha(E_\beta) = \lambda_\alpha \delta^\alpha_\beta = \lambda_\beta$ ■
Beweis 2 Beispiel:	Wähle $E_\beta = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \varphi_\beta = \varphi_1 = a = (a, b, c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\lambda_1 (1{,}0{,}0) + \lambda_2 (0{,}1{,}0) + \lambda_3 (0{,}0{,}1)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\lambda_1 (1{,}0{,}0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 (0{,}1{,}0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 (0{,}0{,}1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \Longrightarrow \lambda_1 = \varphi_1 = a$ (analog $\varphi_2 = b, \varphi_3 = c$)

Bilineare Abbildungen/Vektorräume

Raum bilinearer Abbildungen ist ein Vektorraum	Die Menge $\mathrm{Bil}(V,\Gamma)=\{f:V\times V\to\Gamma: f\, bilinear\}$ ist ein Vektorraum. Definition Vektoradditionsoperator: $(\varphi+\psi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v,w)+\psi(v,w)\in\Gamma,\forall\, v,w\in V$ Definition Multiplikationsoperator Skalar/Vektor: $(\lambda\varphi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\lambda\,\varphi(v,w)\in\Gamma,\forall\, v,w\in V,\lambda\in\Gamma$ • Beweise: $\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ ist ein Unterraum von $\{\varphi: V\times V\to\Gamma\}$, und daher auch ein (abgeschlossener) Vektorraum $\Longrightarrow$ z.Z: wenn $\varphi,\psi\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$, dann ist auch $(\varphi+\psi)\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$: • $(\varphi+\psi)(v_1+v_2,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v_1+v_2,w)+\psi(v_1+v_2,w)\overset{Lin.}{=}(\varphi(v_1,w)+\varphi(v_2,w))+(\psi(v_1,w)+\psi(v_2,w))$ $\overset{\text{def}}{=}(\varphi+\psi)(v_1,w)+(\varphi+\psi)(v_2,w)$ ✓ • $(\varphi+\psi)(v,w_1+w_2)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v,w_1+w_2)+\psi(v,w_1+w_2)\overset{Lin.}{=}(\varphi(v,w_1)+\varphi(v,w_2))+(\psi(v,w_1)+\psi(v,w_2))$ $\overset{\text{def}}{=}(\varphi+\psi)(v,w_1)+(\varphi+\psi)(v,w_2)$ ✓ • $(\varphi+\psi)(\lambda\cdot v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(\lambda v,w)+\psi(\lambda v,w)\overset{Lin.}{=}\lambda\,\varphi(v,w)+\lambda\,\psi(v,w)=\lambda(\varphi(v,w)+\psi(v,w))\overset{\text{def}}{=}\lambda\,(\varphi+\psi)(v,w)$ ✓ • $(\varphi+\psi)(v,\lambda\cdot w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v,\lambda w)+\psi(v,\lambda w)\overset{Lin.}{=}\lambda\,\varphi(v,w)+\lambda\,\psi(v,w)=\lambda(\varphi(v,w)+\psi(v,w))\overset{\text{def}}{=}\lambda\,(\varphi+\psi)(v,w)$ ✓ $\Longrightarrow$ Damit ist $\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ ein Unterraum von $\{f:V\times V\to\Gamma\}$ und somit ein Vektorraum
$f(E_\alpha,E_\beta)\overset{\text{def}}{=}f_{\alpha\beta}$ bestimmt f eindeutig	Sei $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Basis in V. Dann ist $f\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ durch die Wirkung auf E_α eindeutig bestimmt: $\boxed{f(E_\alpha,E_\beta)\overset{\text{def}}{=}f_{\alpha\beta}\in\Gamma}$ Beweis: (1) $f(v,w)=f(v^\alpha E_\alpha,w^\beta E_\beta)\overset{Bil.}{=}v^\alpha w^\beta f(E_\alpha,E_\beta)\overset{\text{def}}{=}v^\alpha w^\beta f_{\alpha\beta}$; (2) $f(v,w)=v^\alpha w^\beta f_{\alpha\beta}\overset{Ann.}{=}v^\alpha w^\beta g_{\alpha\beta}\overset{\text{def}}{=}v^\alpha w^\beta\, g(E_\alpha,E_b)\overset{Bil.}{=}g(v^\alpha E_\alpha,w^\beta E_\beta)=g(v,w)$ ■
Tensorprodukt	Sei $\varphi,\psi\in V^\sim$. Die Wirkung des Tensorprodukts $\varphi\otimes\psi\in\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ auf die Vektoren $v,w\in V$ ist: $\boxed{(\varphi\otimes\psi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)\,\psi(w)}$ $\boxed{\otimes^2 V^\sim\overset{\text{def}}{=}\{\sum\lambda_{\varphi\psi}\varphi\otimes\psi:\varphi,\psi\in V^\sim\}=\mathrm{Bil}(V,\Gamma)}$ (i.e.: Menge aller LK von $\varphi\otimes\psi:\varphi,\psi\in V^\sim$) Bew.: (1) $\otimes^2 V^\sim\subseteq\mathrm{Bil}(V,\Gamma)$ weil $(\varphi\otimes\psi)(v,w)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)\,\psi(w)$; (2) $f(E_\alpha,E_\beta)=f_{\alpha\beta}=f_{\gamma\delta}\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta\overset{\text{def}}{=}f_{\gamma\delta}\,e^\gamma(E_\alpha)\,e^\delta(E_\beta)\overset{\text{def}}{=}\left(f_{\gamma\delta}(e^\gamma\otimes e^\delta)\right)(E_\alpha,E_\beta)\Longrightarrow$ $f=f_{\gamma\delta}(e^\gamma\otimes e^\delta)\in\otimes^2V^\sim\Longrightarrow\mathrm{Bil}(V,\Gamma)\subseteq\otimes^2V^\sim$; aus (1) und (2) $\Longrightarrow\boxed{\otimes^2V^\sim=\mathrm{Bil}(V,\Gamma)}$ ■

Doppeldualraum

Doppeldualraum	Der Doppeldualraum $(V^\sim)^\sim\overset{\text{def}}{=}\{\Phi:V^\sim\to\Gamma:\varphi\ ist\ linear\}$ ist „der Dualraum des Dualraums“. • $\Phi\in(V^\sim)^\sim$ "schluckt" einen Dualraumvektor $\varphi\in V^\sim$ und liefert einen Skalar: $\Phi:\varphi\mapsto\Phi(\varphi)\in\Gamma$ • Jeder Vektor $v\in V$ kann abgebildet werden auf eine Funktion Φ_v aus dem Doppeldualraum: $P: v\in V\mapsto\Phi_v\in(V^\sim)^\sim$ • Diese Funktion Φ_v aus $(V^\sim)^\sim$ (die eine Verbindung zu v aus V herstellt) ist so definiert: $\boxed{\Phi_v(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)}$ • Anschauliche Erklärung: $\Phi_v(\varphi)$ “ist eigentlich dasselbe wie“ $v(\varphi)$ (Identifikation Doppeldualraum/Vektorraum): $\Phi_v(\varphi)=\varphi(v)=\langle\varphi,v\rangle=v(\varphi)$. („Kanonische Paarung“) Additionsoperator: $\Phi_{v+w}(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v+w)\overset{lin}{=}\varphi(v)+\varphi(w)\overset{\text{def}}{=}\Phi_v(\varphi)+\Phi_w(\varphi)\overset{\text{def}}{=}(\Phi_v+\Phi_w)(\varphi)\Longrightarrow\Phi_{v+w}=\Phi_v+\Phi_w$ Multiplikationsoperator: $\Phi_{\lambda v}(\varphi)\overset{\text{def}}{=}\varphi(\lambda v)\overset{lin}{=}\lambda\,\varphi(v)\overset{\text{def}}{=}\lambda\,\Phi_v(\varphi)=(\lambda\Phi_v)(\varphi)\Longrightarrow\Phi_{\lambda v}=\lambda\Phi_v$ Linearität: (1) $\Phi_v(\varphi+\psi)=(\varphi+\psi)(v)\overset{\text{def}}{=}\varphi(v)+\psi(v)=\Phi_v(\varphi)+\Phi_v(\psi)\in\Gamma;\ \forall\, v\in V;\varphi\in V^\sim$ (2): $\Phi_v(\lambda\varphi)\overset{\text{def}}{=}(\lambda\varphi)(v)\overset{lin}{=}\lambda\,\varphi(v)=\lambda\,\Phi_v(\varphi)\in\Gamma;\ \forall\, v\in V,\varphi\in V^\sim;\lambda\in\Gamma$ $\Longrightarrow\Phi_v(\varphi)=v(\varphi)=\varphi(v)\Longrightarrow V\subseteq(V^\sim)^\sim$ ... (1) (gilt immer) Außerdem: $\Phi(e^\alpha)=\Phi^\alpha=\Phi^\beta\delta^\alpha_\beta=\Phi^\beta\, e^\alpha(E_\beta)=\Phi^\beta\, E_\beta(e^\alpha)\overset{endl.dim.}{=}(\Phi^\beta E_\beta)(e^\alpha)\Longrightarrow\Phi=\Phi^\beta E_\beta\Longrightarrow(V^\sim)^\sim\subseteq V$ ... (2) (1), (2) $\Longrightarrow\boxed{(V^\sim)^\sim=V}$ (wenn V endlichdimensional)

Multilineare Abbildungen/Vektorräume

Raum bilinearer Abbildungen ist ein Vektorraum	Die Menge $\text{Mult}_p(V,\Gamma) = \{f: V \times \ldots \times V \to \Gamma: f \textit{ ist lin. in jedem Arg.}\}$ ist ein Vektorraum. Definition Vektoradditionsoperator: $(\varphi + \psi)(v_1, \ldots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(v_1, \ldots, v_p) + \psi(v_1, \ldots, v_p) \in \Gamma, \forall v_1, \ldots, \forall v_p \in V$ Definition Multiplikationsoperator Skalar/Vektor: $(\lambda\varphi)(v_1, \ldots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\,\varphi(v_1, \ldots, v_p) \in \Gamma, \forall v_1, \ldots, v_p \in V, \forall \lambda \in \Gamma$ $\Longrightarrow$ Damit ist $(\varphi + \psi)(v, w)$ multilinear. Beweis: • $(\varphi + \psi)(u_1 + u_2, v_2, \ldots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(u_1 + u_2, v_2, \ldots, v_p) + \psi(u_1 + u_2, v_2, \ldots, v_p) \stackrel{lin.}{=}$ $\big(\varphi(u_1, v_2, \ldots, v_p) + \varphi(u_2, v_2, \ldots, v_p)\big) + \big(\psi(u_1, v_2, \ldots, v_p) + \psi(u_2, v_2, \ldots, v_p)\big) \stackrel{\text{def}}{=}$ $(\varphi + \psi)(u_1, v_2, \ldots, v_p) + (\varphi + \psi)(u_2, v_2, \ldots, v_p)$ ✓ • analog in allen anderen Argumenten • $(\varphi + \psi)(\lambda v_1, v_2, \ldots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\lambda v_1, v_2, \ldots, v_p) + \psi(\lambda v_1, v_2, \ldots, v_p) \stackrel{bil.}{=} \lambda\,\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_p) + \lambda\,\psi(v_1, v_2, \ldots, v_p) =$ $\lambda\big(\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_p) + \psi(v_1, v_2, \ldots, v_p)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\,(\varphi + \psi)(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ ✓ • analog in allen anderen Argumenten $\Longrightarrow$ Damit ist $\text{Mult}_p(V,\Gamma)$ ein Unterraum von $\{f: V \times \ldots \times V \to \Gamma\}$ und somit ein Vektorraum
Eindeutigkeit	Sei $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Basis in V. Dann ist $f \in \text{Mult}_p(V,\Gamma)$ durch die Wirkung auf E_α <u>eindeutig</u> bestimmt: $\boxed{f\left(E_{a_1}, \ldots, E_{a_p}\right) \stackrel{\text{def}}{=} f_{a_1 \ldots a_p} \in \Gamma}$ <u>Beweis:</u> (1) $f(v_1, \ldots, v_p) = f\left(v_1^{a_1} E_{a_1}, \ldots, v_p^{a_p} E_{a_p}\right) \stackrel{lin}{=} v^{a_1} \ldots v^{a_p} f\left(E_{a_1}, \ldots, E_{a_p}\right) \stackrel{\text{def}}{=} v^{\alpha_1} \ldots v^{\alpha_p} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$; (2) $f(v_1, \ldots, v_p) = v^{\alpha_1} \ldots v^{\alpha_p} f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \stackrel{Ann.}{=} v^{\alpha_1} \ldots v^{\alpha_p} g_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} v^{\alpha_1} \ldots v^{\alpha_p} g\left(E_{a_1}, \ldots, E_{a_p}\right) \stackrel{lin.}{=} g\left(v_1^{a_1} E_{a_1}, \ldots, v_p^{a_p} E_{a_p}\right) = g(v_1, \ldots, v_p)$
Tensorprodukt	Sei $\varphi_1 \ldots \varphi_p \in V^\sim$ und $v_1 \ldots v_p \in V$. Dann gilt: $\boxed{(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p)(v_1, \ldots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(v_1) \ldots \varphi_p(v_p)}$ $\boxed{\otimes^p V^\sim \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\lambda_{\varphi_1 \ldots \varphi_p} \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p : \varphi_1, \ldots, \varphi_p \in V^\sim\right\} = \text{Mult}_p(V,\Gamma)}$ (i.e.: Menge aller LK von $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$). <u>Bew.:</u> (1) $\otimes^p V^\sim \subseteq \text{Mult}_p(V,\Gamma)$ weil $(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_p)(v_1, \ldots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(v_1) \ldots \varphi_p(v_p)$; (2) $\text{f}\left(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_p}\right) = f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = f_{\gamma_1 \ldots \gamma_p} \delta^{\gamma_1}_{\alpha_1} \ldots \delta^{\gamma_p}_{\alpha_p} \stackrel{\text{def}}{=} f_{\gamma_1 \ldots \gamma_p} \text{e}^{\gamma_1}(E_{\alpha_1}) \ldots \text{e}^{\gamma_p}\left(E_{\alpha_p}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f_{\gamma_1 \ldots \gamma_p}(\text{e}^{\gamma_1} \otimes \ldots \otimes \text{e}^{\gamma_p})\right)\left(E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_p}\right) \Longrightarrow$ $f = f_{\gamma_1 \ldots \gamma_p}(\text{e}^{\gamma_1} \otimes \ldots \otimes \text{e}^{\gamma_p}) \in \otimes^p V^\sim \Longrightarrow \text{Mult}_p(V,\Gamma) \subseteq \otimes^p V^\sim$; aus (1) und (2) $\Longrightarrow$ $\boxed{\otimes^p V^\sim = \text{Mult}_p(V,\Gamma)}$ ■

Tensor-Transformationsverhalten (a.k.a: Was ist also jetzt ein Tensor?)

kovariant, kontravaiant	• Index unten ⇔ „kovariant“ (wie die Basisvektoren), Index oben ⇔„kontravariant“ (entgegen den Basisvektoren). • Anschaulich: *„kontravariante Größen werden kleiner, wenn kovarianten Größen wachsen, und umgekehrt“*. • Die <u>Basisvektoren</u> E_i des Basisraums V sind <u>ko</u>variant. • Die <u>Koordinaten v^i von Vektoren im Basisraum</u> ($v = v^i E_i$) sind <u>kontra</u>variant. • Die <u>Basisvektoren e^i des Dualraums</u> $V^\sim$ sind <u>kontra</u>variant. • Die <u>Koordinaten φ_i von Vektoren im Dualraum</u> ($\varphi = \varphi_i e^i$) sind <u>ko</u>variant.
Definition Tensor T	$T \in \otimes^p_q V = (\otimes^p V) \otimes (\otimes^q V^\sim) = \text{Mult}_{p,q}(V, V^\sim, \Gamma) = \left\{T: \underbrace{V^\sim \times \ldots \times V^\sim}_{p-mal} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q-mal} \to \Gamma: \text{lin. in jedem Arg.}\right\}$ $T: \varphi_1, \ldots, \varphi_p, v_1, \ldots, v_q \mapsto \text{T}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p, v_1, \ldots, v_q) \in \Gamma$ p … Anzahl duale Vektoren $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in V^\sim$, die der Tensor als Input nimmt. Achtung: Er besteht daher aus p Vektoren $\in V$! q … Anzahl Vektoren $v_1, \ldots, v_q \in V$, die der Tensor als Input nimmt. Achtung: Er besteht daher aus q Dualvektoren $\in V^\sim$!
Basis	Sei $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Basis in V und $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ die entspr. Dualbasis in $V^\sim$ (E_α und e_α sind Basisvektoren in V und $V^\sim$, α ist Zählindex) Dann ist $E_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes E_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \ldots \otimes e^{\beta_q}$ eine Basis von $\otimes^p_q V$ und $T = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} E_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes E_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \ldots \otimes e^{\beta_q}$
Basistransformation	Sei $\left(\tilde{E}_\alpha\right)_{\alpha \in I}$ eine andere Basis in V und $(\tilde{e}_\alpha)_{\alpha \in I}$ die entsprechende Dualbasis in $V^\sim$. Wir definieren folgende Transformationen: $\boxed{\tilde{E}_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha E_\beta}$ … (1); $\boxed{E_\beta = \Sigma^\alpha{}_\beta \tilde{E}_\alpha}$ … (2) $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \tilde{E}_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha \Sigma^\gamma{}_\beta \tilde{E}_\gamma \Longrightarrow \tilde{E}_\alpha = \Lambda^\beta{}_\alpha \Sigma^\gamma{}_\beta \tilde{E}_\gamma = \delta^\gamma_\alpha \tilde{E}_\gamma \Longrightarrow$ $\boxed{\Lambda^\beta{}_\alpha \Sigma^\gamma{}_\beta = \delta^\gamma_\alpha}$ … (3) $\tilde{e}^\alpha = \Xi^\alpha{}_\beta e^\beta$ … (4)$\vert\tilde{E}_\gamma \Longrightarrow \tilde{e}^\alpha(\tilde{E}_\gamma) = (\Xi^\alpha{}_\beta e^\beta)(\tilde{E}_\gamma) \Longrightarrow \delta^\alpha_\gamma \stackrel{lin.}{=} \Xi^\alpha{}_\beta\, e^\beta(\tilde{E}_\gamma) \stackrel{(1)}{=} \Xi^\alpha{}_\beta\, e^\beta(\Lambda^\delta{}_\gamma E_\delta) \stackrel{lin.}{=} \Xi^\alpha{}_\beta \Lambda^\delta{}_\gamma\, e^\beta(E_\delta) \Longrightarrow$ $\delta^\alpha_\gamma = \Xi^\alpha{}_\beta \Lambda^\delta{}_\gamma \delta^\beta_\delta \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \Lambda^\beta{}_\gamma \Sigma^\alpha{}_\beta = \Xi^\alpha{}_\beta \Lambda^\delta{}_\gamma \delta^\beta_\delta \Longrightarrow \Lambda^\beta{}_\gamma \Sigma^\alpha{}_\beta = \Xi^\alpha{}_\beta \Lambda^\beta{}_\gamma \Longrightarrow \Sigma^\alpha{}_\beta = \Xi^\alpha{}_\beta \Longrightarrow$ $\boxed{\tilde{e}^\alpha = \Sigma^\alpha{}_\beta e^\beta}$ … (5) $\Longrightarrow$ $\boxed{e^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \tilde{e}^\beta}$ … (6)
Tensortransformationsverhalten	$T = T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}{}_{\delta_1 \ldots \delta_q} E_{\gamma_1} \otimes \ldots \otimes E_{\gamma_p} \otimes e^{\delta_1} \ldots \otimes e^{\delta_q} = \tilde{T}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \tilde{E}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{E}_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \ldots \otimes \tilde{e}^{\beta_q} \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$ $T = T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}{}_{\delta_1 \ldots \delta_q} (\Sigma^{\alpha_1}{}_{\gamma_1} \tilde{E}_{\alpha_1}) \otimes \ldots \otimes \left(\Sigma^{\alpha_p}{}_{\gamma_p} \tilde{E}_{\alpha_p}\right) \otimes (\Lambda^{\delta_1}{}_{\beta_1} \tilde{e}^{\beta_1}) \ldots \otimes \left(\Lambda^{\delta_q}{}_{\beta_q} \tilde{e}^{\beta_q}\right) \stackrel{lin.}{\Rightarrow}$ $T = \Sigma^{\alpha_1}{}_{\gamma_1} \ldots \Sigma^{\alpha_p}{}_{\gamma_p} \Lambda^{\delta_1}{}_{\beta_1} \Lambda^{\delta_q}{}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}{}_{\delta_1 \ldots \delta_q} \tilde{E}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{E}_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \ldots \otimes \tilde{e}^{\beta_q}$ $\boxed{\tilde{T}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}{}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \Sigma^{\alpha_1}{}_{\gamma_1} \ldots \Sigma^{\alpha_p}{}_{\gamma_p} \Lambda^{\delta_1}{}_{\beta_1} \Lambda^{\delta_q}{}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}{}_{\delta_1 \ldots \delta_q}}$ … Tensortransformationsverhalten (setzt Basis voraus) „Münchhausendefinition“: Ein Tensor ist ein Tensor, wenn er wie ein Tensor transformiert.

Abstrakte Indexschreibweise nach Penrose

Konventionen	• Abstrakte Indizes werden in kleinen lateinischen Buchstaben a, b, c … geschrieben. Sie repräsentieren keine Zahl und keinen Zählindex, sondern definieren die Art des Objekts. Hochgestellter abstrakter Index: $\in V$, tiefgestellt: $\in V^{\sim}$. Sie sind also eher wie „Vektorpfeile" zu verstehen. Vektoren mit abstrakten Indizes sind <u>nicht</u> basisbezogen. • Konkrete Indizes (Zählindizes) werden entweder mit griechischen Buchstaben α, β, γ … oder lateinischen Buchstaben $i, j, k, l, m, \dots$ dargestellt. Sie repräsentieren konkrete Zahlen und sind basisbezogen. Ein einzelner Index α ohne zusätzlichen abstrakten Index steht z.B. für das α-te Element eines Zahlentupels. Ein Vektor v^{α} stellte einen Koordinatenvektor dar. • Indizes, die Teil der Bezeichnung sind (z.B. erster und zweiter Parameter), werden über das Objekt geschrieben.
Beispiele abstrakte Indizes	Vergleich Koordinatenindexschreibweise → abstrakte Indexschreibwese (wobei $v, w, E \in V;\ \varphi, e \in V^{\sim};\ v^{\alpha} \in \Gamma$): • $v \to v^{a}$ Der hochgestellte abstrakte Index a zeigt an, dass v ein Vektor aus V ist. • $\varphi \to \varphi_{a}$ Der tiefgestellte abstrakte Index a zeigt an, dass φ ein Dualvektor aus $V^{\sim}$ ist. • $v \otimes w \to v^{a} w^{b}$ Ein Tensor der Stufe 2 • $\varphi(v) = \mathrm{v}(\varphi) \to \varphi_{a} v^{a} = v^{a} \varphi_{a}$ Die Notation macht keinen Unterschied zwischen $\varphi(v)$ und $\mathrm{v}(\varphi)$, und integriert somit den natürlichen Isomorphismus $v \in V \cong (V^{\sim})^{\sim}$ (die kanonische Paarung $\langle\varphi, \mathrm{v}\rangle$). • $T \in \otimes^{p}_{q} V \to T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}$ Durch die Anzahl und Stellung der abstrakten Indizes ist die Art des Tensors eindeutig definiert. • $\mathrm{T}(\varphi_1, \dots, \varphi_p, v_1, \dots, v_q) \in \otimes^{p}_{q} V \to T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} \overset{1}{\varphi}_{a_1} \dots \overset{p}{\varphi}_{a_p} \overset{1}{v}^{b_1} \dots \overset{q}{v}^{b_q}$
Mischung konkrete und abstrakte Indizes	• $v = v^{\alpha} E_{\alpha} \to v^{a} = v^{\alpha} E^{a}_{\alpha}$ Der hochgestellte abstrakte Index a bei E^{a}_{α} zeigt an, dass E ein (Basis-)Vektor aus V ist. Der hochgestellte Zählindex α bei v^{α} zeigt an, dass die Vektorkoordinate v^{α} skalar ist, und sich kontravariant verhält. Der tiefgestellte Zählindex α bei E^{a}_{α} zeigt an, dass jeweils der α-te Basisvektor E mit v^{α} zu multiplizieren ist. • $\tilde{v}^{i} = v^{a} e^{i}_{a}$ • $e^{\alpha}(E_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta} \to e^{\alpha}_{a} E^{a}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$ (Dualitätsrelation) • $v^{i} = v^{a} e^{i}_{a}$ Die duale Basis e^{i}_{a} „erzeugt" die Koordinaten v^{i}.

(Minkowski)-Metrik und Lorentz-Transformationen

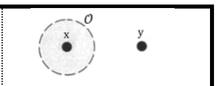
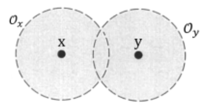
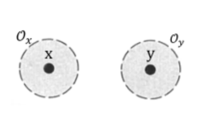
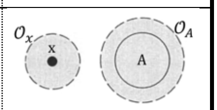
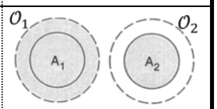
Definition	Der metrische Tensor dient dazu, mathematische Räume, insbesondere differenzierbare Mannigfaltigkeiten, mit einem Maß für Abstände und Winkel auszustatten. $\eta_{ab} \in \otimes^{0}_{2} V = \otimes^{2}_{0} V^{\sim}$
Minkowski	$\eta_{ab} E^{a}_{\alpha} E^{b}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$
Eigenschaften	Seien E^{a}_{α} und $\tilde{E}^{a}_{\alpha}$ ONB's mit der Transformation $\tilde{E}^{a}_{\alpha} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha} E^{a}_{\beta}$ $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{ab} E^{a}_{\alpha} E^{b}_{\beta} = \eta_{ab} \tilde{E}^{a}_{\alpha} \tilde{E}^{b}_{\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$…nur bei ONB! $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{ab} \tilde{E}^{a}_{\alpha} \tilde{E}^{b}_{\beta} = \eta_{ab} (\Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} E^{a}_{\gamma})(\Lambda^{\delta}{}_{\beta} E^{b}_{\delta}) = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} \Lambda^{\delta}{}_{\beta} \eta_{ab} E^{a}_{\gamma} E^{b}_{\delta} = \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} \Lambda^{\delta}{}_{\beta} \eta_{\gamma\delta}$ … Lorentz-Trafo (macht aus einer ONB eine ONB)

Topologie

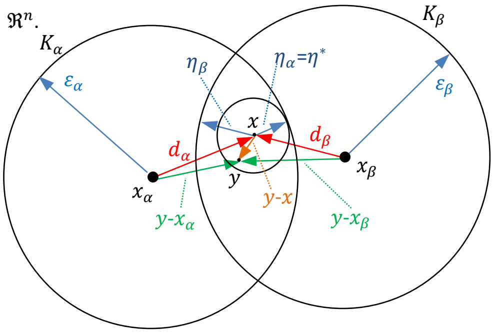
Gerade	• Eine **Gerade** ist eine autoparallele Kurve (Tangentialvektoren sind immer parallel) • Eine **Gerade** ist eine geodätische Kurve (kürzeste Verbindung zweier Punkte) Z.B. auf einer Kugeloberflächen sind Geraden Großkreissegmente (Schnittpunkt einer Ebene durch den Kugelmittelpunkt mit der Kugeloberfläche)
Menge	Eine Menge ist ein Verbund von Elementen (keine Doppeleinträge, Reihenfolge egal). Z.B.: $A = \{1,7,3\}; B = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$
Familie	Wenn abzählbar: Liste (Doppeleinträge erlaubt, Reihenfolge wichtig). Wenn überabzählbar: Funktionsartig. z.B.: F= $(0,1,1,3,2); G = (a_i)_{i \in I}$ (I…Indexmenge)
Notation Abbildungen	$f: X \to Y$ bezeichnet eine Abbildung, die von der Menge X in die Menge Y abbildet, wobei <u>alle</u> Punkte aus X abgebildet werden (X ist Definitionsmenge), aber <u>nicht</u> alle Punkte in Y erreicht werden müssen (die Bildmenge kann <u>kleiner</u> sein als Y).
Potenzmenge	Die **Potenzmenge** $\mathrm{P}(X)$ einer Menge X ist die „Menge aller Teilmengen von X", inklusive der leeren Menge $\emptyset$ und der Menge X selber: $\mathrm{P}(X) = \{A: A \subseteq X\}$
Topologie	Eine **Topologie** $\mathfrak{X}$ zu Menge X ist ist eine Teilmenge der Potenzmenge von X, wenn sie mindestens die leere Menge $\emptyset$ und die Menge X selber enthält, sowie alle endlichen Schnittmengen und beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\mathfrak{X}$. Mit anderen Worten: Sei X eine Menge, und $\mathrm{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Dann ist $\mathfrak{X} \subseteq X$ eine Topologie, wenn gilt: (1) $\emptyset \in \mathfrak{X}, X \in \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ beinhaltet X and die leere Menge), (2) $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \in \mathfrak{X} \Longrightarrow \mathcal{O}_1 \cap \dots \cap \mathcal{O}_n \in \mathfrak{X}$ (ein endlicher Durchschnitt offener Mengen ist wieder $\in \mathfrak{X}$, und daher auch offen), (3) $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq \mathfrak{X} \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{O}_\alpha \in \mathfrak{X}$ ($\mathfrak{X}$ beinhaltet alle beliebigen Vereinigungen von Elementen $\{\mathcal{O}_\alpha : \alpha \in I\}$)
Topol. Raum	Sei X eine Menge und $\mathfrak{X}$ eine Topologie auf X. Dann nennt man das Paar $(X, \mathfrak{X})$ einen **topologischen Raum**.
offene Menge	Jede Teilmenge $\mathcal{O}$ eines topologischen Raums $(X, \mathfrak{X})$, die ein Element von $\mathfrak{X}$ ist, nennt man **offene (Teil-)Menge** von X
abgeschl. M.	Jede Teilmenge A eines topologischen Raums $(X, \mathfrak{X})$, für die gilt $X \backslash A \in \mathfrak{X}$, nennt man **abgeschlossene (Teil-)Menge** von X
offene Umgeb	Sei $x \in (X, \mathfrak{X})$, dann ist jede offene Menge $\mathcal{O} \in \mathfrak{X}$, für die gilt $x \in \mathcal{O}$ eine offene Umgebung von x.
Indiskrete Top	Die **indiskrete Topologie** auf die Menge X ist die „minimale" Topologie $\mathcal{J} = \{\emptyset, X\}$
Diskrete Top.	Die **diskrete Topologie** auf die Menge X ist die „maximale" Topologie $\vartheta = \mathrm{P}(X)$
Konvergenz einer Folge	Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (X, \mathfrak{X})$ **konvergiert** gegen x^*, wenn es zu <u>jeder</u> offenen Umgebung $\mathcal{O}$ von x^* einen Folgenindex N gibt, so dass für alle $n > N$ alle weiteren Folgenglieder $(x_n)_{n > N}$ Element von $\mathcal{O}$ bleiben: $x_n \to x^* \Leftrightarrow (\forall \mathcal{O} \in \mathfrak{X}: x^* \in \mathcal{O}): \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N: x_n \in \mathcal{O}$ • In topologischen Räumen mit der indiskreten (gröbsten) Topologie $(X, \mathcal{J})$ konvergiert jede Folge gegen <u>jeden</u> Wert x^*, weil die einzig offene Umgebung jedes beliebigen x^* in der Topologie von $\mathcal{J} = \{\emptyset, X\}$ die Menge X selber ist. • In topologischen Räumen mit der diskreten (feinsten) Topologie (X, ϑ) konvergieren nur quasistatische Folgen (das sind Folgen, die ab einem gewissen Index $N > n$ einen konstanten Wert x_0 haben), da die Topologie ϑ insbesondere auch „besonders kleine Umgebungen" in Form von Einzelpunktmengen mit jeden Punkt $x_0 \in \vartheta$ beinhaltet. • Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(X, \mathcal{T}_1)$ konvergiert, und $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in $(X, \mathcal{T}_2)$

Urbild	Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Dann ist das **Urbild** $f^{-1}(B) \in X$ einer Teilmenge $B \subseteq Y$ die Menge aller Punkte in $x \in X$, so dass $f(x) \in B$: $f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X: f(x) \in B\}$. „Nur die x, die in B abgebildet werden, gehören zu $f^{-1}(B)$"
Stetigkeit	$f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})$ ist stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(\mathcal{O})$ aller offenen Mengen $\mathcal{O} \in \mathfrak{Y}$ wieder eine offene Menge $\in \mathfrak{X}$ ist: $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})\ stetig \Leftrightarrow \forall \mathcal{O} \in \mathfrak{Y}: f^{-1}(\mathcal{O}) \in \mathfrak{X}$
Komposition stetiger Funktionen ist wieder stetig.	Sei $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})$ stetig, $g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (Z,\mathfrak{Z})$ stetig. Dann ist auch $g \circ f$ stetig, wobei $(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$. z.Z.: $\boxed{f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y}),\ g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (Z,\mathfrak{Z}) \text{ stetig} \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}_z \in \mathfrak{Z}: (g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}_z) \in \mathfrak{X}}$. Beweis: $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})\ stetig \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}_y \in \mathfrak{Y}: f^{-1}(\mathcal{O}_y) \in \mathfrak{X}$ ... (1) $\quad (g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}_z) \stackrel{?}{\in} \mathfrak{X} \Longrightarrow \underbrace{f^{-1}\Big(\underbrace{g^{-1}(\mathcal{O}_z)}_{(2)\Rightarrow\in\mathfrak{Y}}\Big)}_{(1)\Rightarrow\in\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ ■ $g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (Z,\mathfrak{Z})\ stetig \Leftrightarrow \forall \mathcal{O}_z \in \mathfrak{Z}: g^{-1}(\mathcal{O}_z) \in \mathfrak{Y}$ ... (2)
Lemma $f^{-1}(B_1 \cap B_2)$	Sei $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y}); B_1, B_2 \subseteq Y$. Dann ist $\boxed{f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)}$ Beweis: $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ ■
Lemma $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha)$	Sei $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y}); (B_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq P(Y)$. Dann ist $\boxed{f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)}$ Beweis: $x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha_0: f(x) \in B_{\alpha_0} \Leftrightarrow \exists \alpha_0: x \in f^{-1}(B_{\alpha_0}) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$ ■
Topologisierung	Sei X eine Menge (ohne Topologie), und $f: X \to (Y,\mathfrak{Y})$ eine Abbildung. Dann kann mittels Abbildung f eine Topologie $\mathfrak{X}_f$ auf X erzeugt werden: $\mathfrak{X}_f \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{O}: \exists \mathcal{O}' \in \mathfrak{Y}: \mathcal{O} = f^{-1}(\mathcal{O}')\}$, oder einfacher: $\mathfrak{X}_f \stackrel{\text{def}}{=} \{f^{-1}(\mathcal{O}'): \mathcal{O}' \in \mathfrak{Y}\}$ ... (1) „$\mathfrak{X}_f$ sind die Urbilder aller offenen Mengen in Y". Zu zeigen: $\mathfrak{X}_f$ ist eine Topologie. (i) $\emptyset = f^{-1}(\emptyset), X = f^{-1}(Y)$ ■ (ii) Sei $\mathcal{O}_1', \mathcal{O}_2' \in \mathfrak{Y}$ ... (2) und $\mathcal{O}_1 = f^{-1}(\mathcal{O}_1'), \mathcal{O}_2 = f^{-1}(\mathcal{O}_2')$ ... (3) $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X}_f$ ... (4) $\mathcal{O}_1', \mathcal{O}_2' \in \mathfrak{Y} \xRightarrow{\mathfrak{Y}\text{ ist Topologie}} \mathcal{O}_1' \cap \mathcal{O}_2' \in \mathfrak{Y} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f^{-1}(\mathcal{O}_1' \cap \mathcal{O}_2') \in \mathfrak{X}_f \xRightarrow{(Lemma)} f^{-1}(\mathcal{O}_1') \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2') \in \mathfrak{X}_f \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X}_f$ ■ (iii) Sei $(\mathcal{O}_\alpha')_{\alpha\in I} \subseteq \mathfrak{Y}$ ... (5) und $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I} = f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha')$ ... (6) $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} (\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq \mathfrak{X}_f$ ... (7) $(\mathcal{O}_\alpha')_{\alpha\in I} \subseteq \mathfrak{Y} \xRightarrow{\mathfrak{Y}\text{ ist Topologie}} \bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{O}_\alpha' \in \mathfrak{Y} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{O}_\alpha') \in \mathfrak{X}_f \xRightarrow{(Lemma)} \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha') \in \mathfrak{X}_f \stackrel{(6)}{\Rightarrow} \bigcup_{\alpha\in I}(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I} \in \mathfrak{X}_f$ ■
Teilmengentopologie	Sei $U \subseteq X$ eine Teilmenge des Topologischen Raums $(X,\mathfrak{X})$. Die **Teilmengentopologie** (auch: **Teilraumtopologie, induzierte Topologie, Spurtopologie**) ist die natürliche Struktur, die die Teilmenge U vom topologischen Raum $(X,\mathfrak{X})$ „erbt". Eine Abbildung $i_u: U \to X; x \in U \to x \in X$ *(„Punkt wird auf sich selber abgebildet" - Einbettung)* induziert die Topologie $\mathfrak{X}_{i_u} = i_u^{-1}(\mathfrak{X}) = \{i_u^{-1}(\mathcal{O}): \mathcal{O} \in \mathfrak{X}\}$ ... (1) Abb. „auf sich selber": $x \in i_u^{-1}(\mathcal{O}) = i_u(x) \Leftrightarrow x \in U \cap \mathcal{O}$ ... (2) $\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\mathfrak{X}_{i_u} = \{\mathcal{O}': \mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap U \wedge \mathcal{O} \in \mathfrak{X}\} = \{\mathcal{O} \cap U: \mathcal{O} \in \mathfrak{X}\}}$ Jede Teilmenge U ist in Bezug auf die Spurtopologie $\mathfrak{X}_{i_u}$ offen.
Homöomorph	Ein **Homöomorphismus** bezeichnet eine bijektive, stetige Abbildung f zwischen zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung g ebenfalls stetig ist. Zwei topologische Räume heißen **homöomorph**, wenn sie durch einen Homöomorphismus (topologische Abbildung) ineinander überführt werden können. Sei (i) $f:(X,\mathfrak{X}) \to (Y,\mathfrak{Y})$ eine Abbildung, (ii) $g:(Y,\mathfrak{Y}) \to (X,\mathfrak{X})$ deren Umkehrabbildung; (iii) f, g stetig; (iv) $g \circ f = id_x$; (v) $f \circ g = id_y$ (stetige, bijektive Abb. - invertierbar), dann ist $(X,\mathfrak{X})$ **homöomorph** zu $(Y,\mathfrak{Y})$. $f^{-1}(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X};\ g^{-1}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y} \Leftrightarrow f$ ist ein-eindeutig zwischen offenen Mengen in X und Y. $\Leftrightarrow$ Die beiden Räume sind topologisch nicht unterscheidbar $\Leftrightarrow \mathfrak{X} \stackrel{1:1}{\leftrightarrow} \mathfrak{Y} \Leftrightarrow (X,\mathfrak{X}) \cong (Y,\mathfrak{Y})$

Trennungsaxiome

Trennungsaxiome in $(X,\mathfrak{X})$	T_0	Für zwei <u>beliebige</u> Punkte $x, y \in X$ $(x \neq y)$ gibt es <u>immer</u> eine offene Menge $\mathcal{O} \in \mathfrak{X}$, die den einen Punkt beinhaltet, nicht jedoch den anderen Punkt (Es muss also <u>nur eine Menge $\mathcal{O}$</u> geben). $\forall x, y \in (X,\mathfrak{X}): x \neq y \Longrightarrow (\exists \mathcal{O} \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O} \wedge y \notin \mathcal{O}) \vee (\exists \mathcal{O} \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O} \wedge x \notin \mathcal{O})$	
	T_1	Für zwei <u>beliebige</u> Punkte $x, y \in X$ $(x \neq y)$ gibt es <u>immer</u> eine offene Menge $\mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}$, die den Punkt x beinhaltet <u>und</u> eine offene Menge $\mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}$, die den Punkt y beinhaltet (Es gibt also <u>zwei Mengen $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$, die sich auch überschneiden dürfen</u>): $\forall x, y \in (X,\mathfrak{X}): x \neq y \Longrightarrow (\exists \mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge y \notin \mathcal{O}_x) \wedge (\exists \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y)$	
	T_2	„<u>Hausdorff-Raum</u>": Für zwei <u>beliebige</u> Punkte $x, y \in X$ $(x \neq y)$ gibt es <u>immer</u> zwei <u>disjunkte</u> offene Mengen $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}$, so dass die offene Menge $\mathcal{O}_x$ den Punkt x beinhaltet <u>und</u> die offene Menge $\mathcal{O}_y$ den Punkt y beinhaltet (Es gibt also <u>2 Mengen $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$, die sich nicht überschneiden dürfen</u>). Sei $x, y \in (X,\mathfrak{X}); \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}; x \neq y$. Dann gilt $\forall x, y \in (X,\mathfrak{X}): x \neq y \Longrightarrow$ $(\exists \mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge y \notin \mathcal{O}_x) \wedge (\exists \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y) \wedge (\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset)$	
	T_3	„regulär": Für <u>jeden beliebigen Punkt</u> $x \in X$ und <u>jede abgeschlossene Menge</u> $A \in X$, die x nicht beinhaltet, gibt es immer <u>zwei disjunkte offene Mengen</u> $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_A \in \mathfrak{X}$, so dass <u>$\mathcal{O}_x$ den Punkt x</u> beinhaltet, und <u>$\mathcal{O}_A$ die abgeschlossene Menge A</u>. $\forall x \in (X,\mathfrak{X}); \forall A = \{A \subseteq X: x \notin A \wedge X \backslash A \in \mathfrak{X}\}$ $\Longrightarrow (\exists \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_A \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge A \subseteq \mathcal{O}_A \wedge \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_A = \emptyset)$	
	T_4	„normal": Für <u>zwei beliebige disjunkte, abgeschlossene Mengen</u> $A_1, A_2 \in X$ gibt es <u>immer zwei disjunkte offene Mengen</u> $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X}$, so dass <u>$A_1$ in $\mathcal{O}_1$</u> und <u>A_2 in $\mathcal{O}_2$ enthalten</u> ist. $\forall A_1, A_2: (A_1 \cap A_2 = \emptyset \wedge X \backslash A_1 \in \mathfrak{X} \wedge X \backslash A_2 \in \mathfrak{X}) \Longrightarrow$ $\exists \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2: (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset \wedge A_1 \subseteq \mathcal{O}_1 \wedge A_2 \subseteq \mathcal{O}_2 \wedge \mathcal{O}_1 \in \mathfrak{X} \wedge \mathcal{O}_2 \in \mathfrak{X})$	
Eigenschaften von T_1		(i) T_1 impliziert T_0. (ii) In T_1 ist jede Ein-Punkt-Menge abgeschlossen. Beh.: $\forall x \in (X,\mathfrak{X}) \Longrightarrow \{x\}$ abgeschlossen $\Leftrightarrow X \backslash \{x\} \in \mathfrak{X}$ ... (1) $(y \neq x \Leftrightarrow y \in X \backslash \{x\}) \stackrel{T_1}{\Rightarrow} (\exists \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y) \Longrightarrow \{y\} \subseteq \mathcal{O}_y \subseteq X \backslash \{x\}\ \forall y \in X \backslash \{x\}$ ... (2) $X \backslash \{x\} = \bigcup_{y \in X \backslash \{x\}} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in X \backslash \{x\}} \{\mathcal{O}_y\} \subseteq X \backslash \{x\} \Longrightarrow X \backslash \{x\} = \bigcup_{y \in X \backslash \{x\}} \{\mathcal{O}_y\}$	
Eigenschaften von T_2		(i) T_2 impliziert T_1. (ii) In T_2 hat jede konvergente Folge genau einen Grenzwert. Beweis: Ann.: $x_n \to x$ ... (1) $x_n \to y$ ... (2). $z.Z.: x = y$. Ann. Gegenteil: $x \neq y$ ... (3) $T_2 \Longrightarrow (\exists \mathcal{O}_x \in \mathfrak{X}: x \in \mathcal{O}_x \wedge y \notin \mathcal{O}_x)$ ... (4) $T_2 \Longrightarrow (\exists \mathcal{O}_y \in \mathfrak{X}: y \in \mathcal{O}_y \wedge x \notin \mathcal{O}_y)$ ... (5) $T_2 \Longrightarrow \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$ ... (6) (1), (4) $\Longrightarrow \exists N: \forall n > N: x_n \in \mathcal{O}_x$ ... (7) (2), (5) $\Longrightarrow \exists \tilde{N}: \forall n > \tilde{N}: x_n \in \mathcal{O}_y$ ... (8) (7), (8) $\Longrightarrow \forall N: n > N \wedge n > \tilde{N} \Longrightarrow x_n \in \mathcal{O}_x \wedge x_n \in \mathcal{O}_y \Longrightarrow x_n \in \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y$ ↯ zu (6) $\Longrightarrow x = y$ ■	
sonstiges		$T_3 \wedge T_1$ implizieren T_2, $T_4 \wedge T_1$ implizieren T_3	

Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$

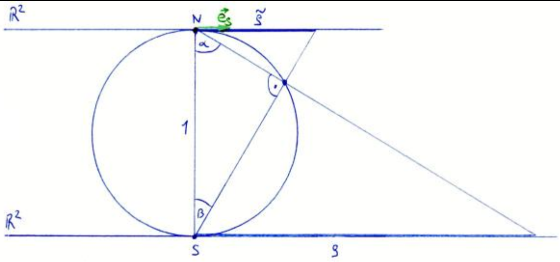
offene ε-Kugel	$\mathrm{K}(x,\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{y\in\mathbb{R}^n: \lvert y-x\rvert<\varepsilon\};\ \ \varepsilon\in\mathbb{R}^+;\ \ \lvert x\rvert \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x^2};\ \ \mathrm{K}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathrm{K}(x_\alpha,\varepsilon_\alpha)$
Standard-topologie.	Die Standardtopologie $\mathfrak{R}^n$ von $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{R}^n)$ ist: $\mathfrak{R}^n \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{O}: \mathcal{O} = \bigcup_{\alpha\in I}\mathrm{K}_\alpha\}$ (alle möglichen Vereinigungen offener Kugeln) z.Z. $\mathfrak{R}^n$ ist eine Topologie. Bew.: (i) a) $\emptyset = (\bigcup_{\alpha\in\emptyset}\mathfrak{R}^n)\in\mathfrak{R}^n$ ✓; (i) b) Beh: $\mathbb{R}^n = \bigcup_{N\in\mathbb{N}}\mathrm{K}(0,N)$, Bew.: $\forall x\in\mathbb{R}^n\ \exists N_0\in\mathbb{N}: N_0>\lvert x\rvert \Rightarrow$ $x\in\mathrm{K}(0,N_0(x))\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ … (1) $\mathrm{K}(0,N_0(x))\subseteq\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\mathrm{K}(0,N)\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ … (2) $\overset{(1)}{\Rightarrow} x\in\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\mathrm{K}(0,N)\ \forall x\in\mathbb{R}^n$ ✓ „Jedes $x\in\mathbb{R}^n$ liegt in einer Kugel um den Nullpkt. mit Radius $N_0>\lvert x\rvert$, daher auch in der Vereinigung $\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\mathrm{K}(0,N)$" (ii) Beh.: $\mathcal{O}_1 = \bigcup_{\alpha\in I}K_\alpha\,;\mathcal{O}_2 = \bigcup_{\beta\in J}K_\beta \Longrightarrow \mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2 = \left(\bigcup_{\gamma\in G}K_\gamma\right)\in\mathfrak{R}^n$. Trivialer Fall: $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\emptyset\in\mathfrak{R}^n$ Nichttrivialer Fall: $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2 = K_1\cap\ldots\cap K_n\neq\emptyset$ $d_\alpha = \lvert x-x_\alpha\rvert<\varepsilon_\alpha;\ d_\beta = \lvert x-x_\beta\rvert<\varepsilon_\beta$ … (3) $\eta_\alpha = \varepsilon_\alpha - d_\alpha;\ \eta_\beta = \varepsilon_\beta - d_\beta;\ \eta^* = \min(\eta_\alpha,\eta_\beta)$ … (4) Beweise, dass alle $y\in\mathrm{K}(x,\eta^*)$ immer in $K_\alpha\cap K_\alpha$ liegen: $\lvert\vec y-\vec x_\alpha\rvert = \lvert(\vec y-\vec x)+(\vec x-\vec x_\alpha)\rvert\le\lvert\vec y-\vec x\rvert+\lvert\vec d_\alpha\rvert\ \Big\vert\ \eta^*>y-x$ $\lvert\vec y-\vec x_\alpha\rvert\le\eta^*+d_\alpha\le\varepsilon_\alpha\Longrightarrow\lvert\vec y-\vec x_\alpha\rvert\le\varepsilon_\alpha\Longrightarrow y\in K_\alpha$ … (5a) $\lvert\vec y-\vec x_\beta\rvert = \lvert(\vec y-\vec x)+(\vec x-\vec x_\beta)\rvert\le\lvert\vec y-\vec x\rvert+\lvert\vec d_\beta\rvert\ \Big\vert\ \eta^*>y-x$ $\lvert\vec y-\vec x_\beta\rvert\le\eta^*+d_\beta\le\varepsilon_\beta\Longrightarrow\lvert\vec y-\vec x_\beta\rvert\le\varepsilon_\beta\Longrightarrow y\in K_\beta$ … (5b) $(5a),(5b)\Longrightarrow y\in K_\alpha\wedge y\in K_\beta\Longrightarrow y\in K_\alpha\cap K_\beta\Longrightarrow\mathrm{K}(x,\eta^*)\subseteq K_\alpha\cap K_\beta$ … (6) $\{x\}\subseteq\mathrm{K}(x,\eta^*)\overset{(6)}{\subseteq}K_\alpha\cap K_\beta\Longrightarrow$ $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\}\subseteq\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\mathrm{K}(x,\eta^*)\subseteq\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\}\Longrightarrow$ $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\mathrm{K}(x,\eta^*) = \bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\}\ \Big\vert\ \bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\{x\} = (K_\alpha\cap K_\beta)\ \Longrightarrow\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\mathrm{K}(x,\eta^*) = (K_\alpha\cap K_\beta)$ Da die Standardtopologie $\mathfrak{R}^n$ lt. Definition aber alle möglichen Vereinigungen aller möglichen offenen Kugeln beinhaltet, ist auch $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\mathrm{K}(x,\eta^*)$ in der Topologie enthalten: $\bigcup_{x\in(K_\alpha\cap K_\beta)}\mathrm{K}(x,\eta^*)\in\mathfrak{R}^n\Longrightarrow K_\alpha\cap K_\beta\in\mathfrak{R}^n$ ✓  (iii) *Beh.*: $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}\subseteq\mathfrak{R}^n\Longleftrightarrow(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha)\in\mathfrak{R}^n$ … (7) *z.Z.*: $(\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha)\in\mathfrak{R}^n$ Jede offene Menge $\mathcal{O}_\alpha$ in $\mathfrak{R}^n$ besteht lt. Definition aus der Vereinigung von off. Kugeln: $\forall\alpha\in I\ \exists I_\alpha:\mathcal{O}_\alpha\overset{\text{def}}{=}\bigcup_{\beta\in I_\alpha}K_\beta\overset{(7)}{\Rightarrow}$ Daher sind beliebige Vereinigungen von offenen Mengen $\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha$ dasselbe wie beliebige Vereinigungen von beliebigen Vereinigungen offener Kugeln. $\bigcup_{\alpha\in I}\left(\bigcup_{\beta\in I_\alpha}K_\beta\right)$. Doch das ist wieder nur die Vereinigungen von (bestimmten) offenen Kugeln $\bigcup_{\gamma\in I_\gamma}K_\gamma$. Da die Standardtopologie $\mathfrak{R}^n$ lt. Definition aber alle möglichen Vereinigungen aller möglichen offenen Kugeln beinhaltet, ist $\bigcup_{\gamma\in I_\gamma}K_\gamma$ in der Topologie enthalten: $\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}\left(\bigcup_{\beta\in I_\alpha}K_\beta\right) = \bigcup_{\gamma\in I_\gamma}K_\gamma\in\mathfrak{R}^n$ ✓

kompakt, parakompakt

kompakt	Ein topologischer Raum $(X,\mathfrak{X})$ ist kompakt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (i) $(X,\mathfrak{X})$ ist T_2 (ii) $\forall(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}\subseteq\mathfrak{X}:\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha = X\Longrightarrow\exists\mathcal{O}_{\alpha_1},\ldots,\mathcal{O}_{\alpha_n}:\mathcal{O}_{\alpha_1}\cup\ldots\cup\mathcal{O}_{\alpha_n} = X$ „Für jede offene Überdeckung $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}$, die ganz X abdeckt, kann ich mit einer endlichen Teilmenge $\{\mathcal{O}_{\alpha_1},\ldots,\mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ aus dieser Überdeckung wieder eine Überdeckung von X erreichen
parakompakt	„Für jede Überdeckung $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha\in I}$, die ganz X abdeckt, kann ich mit einer endlichen Teilmenge $\{\mathcal{O}_{\alpha_1},\ldots,\mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ aus dieser Überdeckung eine Überdeckung einer offenen Teilmenge U_0 erreichen

(Differenzierbare) Mannigfaltigkeiten

Mannig-faltigkeit	Der topologische Raum $(M,\mathfrak{M})$ ist eine **Mannigfaltigkeit**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: (i) $(M,\mathfrak{M})$ ist T_2 (ii) $(M,\mathfrak{M})$ ist parakompakt (iii) $(M,\mathfrak{M})$ ist lokal in der offenen Umgebung $\mathcal{O}\subseteq M$ (mit „geerbter" Spurtopologie) homöomorph zu $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{R}^n)$: $\forall p\in M\ \exists\ \mathcal{O}\in\mathfrak{M}: (\mathcal{O},\mathcal{O}\cap\mathfrak{M})\cong(\mathbb{R}^n,\mathfrak{R}^n)$
Karte	Sei p ein Punkt in $(M,\mathfrak{M})$, $\mathcal{O}\in\mathfrak{M}$ eine offene Umgebung von p, $\Phi:\mathcal{O}\to\mathbb{R}^n$; $\Phi: p\longmapsto(x^1(p),\ldots,x^n(p))\in\mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus (bijektive, stetige Abbildung) zwischen $\mathcal{O}$ und (einer Teilmenge von) $\mathbb{R}^n$ (Φ erzeugt lokale Koordinaten x^μ). Dann ist $(\mathcal{O},\Phi)$ eine **Karte** der offenen Umgebung $\mathcal{O}$ des Punktes p, und $\mathcal{O}$ die sogenannte **Kartenumgebung**.
Atlas	Ein **Atlas** A der Mannigfaltigkeit $(M,\mathfrak{M})$ ist eine Menge von Karten $(\mathcal{O}_\alpha,\Phi_\alpha)$, so dass die Vereinigung der Kartenumgebung die ganze Mannigfaltigkeit M abdeckt: $A = (\mathcal{O}_\alpha,\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}:\bigcup_{\alpha\in I}\mathcal{O}_\alpha = M$
Kartenwech-selabbildung	Seien $(\mathcal{O},\Phi)$, $(\tilde{\mathcal{O}},\tilde\Phi)$ Karten mit überschneidenden Kartenumgebungen $\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}}\neq\emptyset$. Die Abbildungen Φ und $\tilde\Phi$ „erzeugen" für einen Punkt $p\in\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}}$ die Koordinaten x^μ und $\tilde x^\mu\in\mathbb{R}^n$. Dann ist die **Kartenwechselabbildung** $\psi = \tilde\Phi\circ\Phi^{-1}:\Phi(\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}})\to\tilde\Phi(\mathcal{O}\cap\tilde{\mathcal{O}})$; $\psi:(x^1,\ldots,x^n)\mapsto(\tilde x^1,\ldots,\tilde x^n)$ die Abbildung, die die Koordinaten x^μ in $\tilde x^\mu$ umwandelt. Die **Kartenwechselabbildungen reichen aus**, um die Mannigfaltigkeit $(M,\mathfrak{M})$ topologisch eindeutig zu beschreiben!
Dreifachdurch-schnittsbed.	Notationsdefinition: $\mathcal{O}_{\alpha\beta} = \mathcal{O}_\alpha\cap\mathcal{O}_\beta$; $\psi_{\alpha\beta} = \Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}$ (Kartenwechselabbildung von Koordinaten x_β^μ zu Koordinaten x_α^μ) **Dreifachdurchschnittsbedingung**: $\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\beta}\circ\psi_{\beta\gamma}$. Bew.: $\psi_{\alpha\gamma} = \psi_{\alpha\beta}\circ\psi_{\beta\gamma} = \left(\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}\right)\circ\left(\Phi_\beta\circ\Phi_\gamma^{-1}\right) = \Phi_\alpha\circ\left(\Phi_\beta^{-1}\circ\Phi_\beta\right)\circ\Phi_\gamma^{-1} = \Phi_\alpha\circ\Phi_\gamma^{-1} = \psi_{\alpha\gamma}$ ■ Dreifachdurchschnittsbedingung („3DB") ausreichend. Bew.: $\psi_{\alpha\delta} = \psi_{\alpha\beta}\circ\psi_{\beta\gamma}\circ\psi_{\gamma\delta}\overset{3DB}{=}\psi_{\alpha\gamma}\circ\psi_{\gamma\delta}\overset{3DB}{=}\psi_{\alpha\delta}$ ■

Beispiel Kartenwechsel Kugeloberfläche	 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi \Longrightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ … (1) $\tan(\alpha)=\rho$ … (2); $\tan(\beta)=\tilde\rho$ … (3) $\Longrightarrow$ $\tilde\rho=\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\overset{(1)}{=}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{1}{\tan(\alpha)}\overset{(2)}{=}\frac{1}{\rho}$ … (4) $x^i=\rho e^i_\rho \overset{(4)}{=}\frac{1}{\tilde\rho}e^i_\rho \,\Big\vert\cdot\frac{\tilde\rho}{\tilde\rho} \Longrightarrow x^i=\frac{\tilde\rho}{\tilde\rho^2}e^i_\rho \,\big\vert\, e^i_\rho=\tilde e^i_\rho \Longrightarrow$ $x^i=\frac{\tilde\rho}{\tilde\rho^2}\tilde e^i_\rho \Longrightarrow \boxed{x^i=\frac{\tilde x^i}{\tilde\rho^2}=\frac{\tilde x^i}{\lvert\tilde x\rvert^2}}$; analog: $\boxed{\tilde x^i=\frac{x^i}{\rho^2}=\frac{x^i}{\lvert x\rvert^2}}$ $(x,y)\mapsto\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)=(\tilde x,\tilde y)$ Die Kugel S^2 hat zwei Umgebungen: $\mathcal{O}_1=S^2\backslash\{N\}$ und $\mathcal{O}_2=S^2\backslash\{S\}$. Beide sind homöomorph zu $\mathbb{R}^2$. Φ_1 projiziert S auf (0,0) („unteres $\mathbb{R}^2$" in Skizze), kann aber nicht N abbilden, Φ_2 projiziert N auf (0,0) („oberes $\mathbb{R}^2$" in Skizze), kann aber nicht S abbilden. Die Kartenwechselabbildungen können daher nur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ abbilden.
Diff.bare Mannigfaltigkeit	Eine (r-fach) **differenzierbare Mannigfaltigkeit** hat einen Atlas bei dem für alle Karten $(\mathcal{O}_i,\Phi_i)$, $(\mathcal{O}_j,\Phi_j)$ mit überschneidenden Kartenumgebungen gilt: $\mathcal{O}_i\cap\mathcal{O}_j\neq\emptyset \Longrightarrow \Phi_i,\Phi_j^{-1}$ ist (r-fach) stetig differenzierbar auf $\Phi_j(\mathcal{O}_i\cap\mathcal{O}_j)$ (sind C^r). Äquivalent: alle Kartenwechselabbildungen $\Psi_{\alpha\beta}$ sind C^r
Skalare Funktion auf M	Sei $F\colon M\to\mathbb{R}, p\mapsto \mathrm{F}(p)$ eine Abbildung, die jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit $(M,\mathfrak{M})$ einen skalaren Wert zuordnet. Sei $A=(\mathcal{O}_\alpha,\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ ein Atlas von $(M,\mathfrak{M})$. Dann wandelt jede Karte $(\mathcal{O}_\alpha,\Phi_\alpha)$ Punkte einer Umgebung $\mathcal{O}_\alpha$ in Koordinaten x^i_α um. Zu diesen Koordinaten gibt es eine (zur Karte passende) Funktion $\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha)$, die diesen Koordinaten $x^i_\alpha(p)=\Phi_\alpha(p)$ denselben skalaren Wert zuordnet wie $\mathrm{F}(p)$. $\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha(p))\overset{\text{def}}{=}\mathrm{F}(p) \Longrightarrow \boxed{\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha)=\mathrm{F}(\Phi_\alpha^{-1}(x^i_\alpha))=\mathrm{F}\circ\Phi_\alpha^{-1}\colon\Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha)\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}}$
Transformationsgesetz eines Skalars	Beh.: Falls $p\in\mathcal{O}_{\alpha\beta} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha(p))=\mathrm{f}_\beta(x^i_\beta(p))}$. Bew.: $\mathrm{f}_\beta=\mathrm{F}\circ\Phi_\beta^{-1}=\mathrm{F}\circ(\Phi_\alpha^{-1}\circ\Phi_\alpha)\circ\Phi_\beta^{-1}=(\mathrm{F}\circ\Phi_\alpha^{-1})\circ(\Phi_\alpha\circ\Phi_\beta^{-1}) \Longrightarrow$ $\mathrm{f}_\beta=\mathrm{f}_\alpha\circ\psi_{\alpha\beta} \Longrightarrow \mathrm{f}_\beta(x^i_\beta)=\mathrm{f}_\alpha(\psi^i_{\alpha\beta}(x^k_\beta))=\mathrm{f}_\alpha(x^i_\alpha)\overset{allg.}{\Longrightarrow}\boxed{\tilde{\mathrm{f}}(\tilde x^i)=\mathrm{f}(x^i)}$ ■
Gerade	Eine Gerade in der Karte $(\mathcal{O},\Phi)$ ist gegeben mit $x^i=x^i_0+tv^i$, wobei x^i_0 der Startpunkt der Geraden ist, und v^i dem Tangentenvektor („Geschwindigkeitsvektor") entspricht. Die korrespondierende Kurve in der Karte $(\tilde{\mathcal{O}},\tilde\Phi)$ ist i.A. keine Gerade: $\tilde x^i=\psi^i(x^k_0+tv^k)$ mit Kartenwechselabbildung $\psi\colon x^i\mapsto\tilde x^i$, oder in einfacherer Notation: $\tilde x^i=\tilde x^i(x^k_0+tv^k)$.
Äquivalenz von Kurven	Zwei Kurven $x^i_1(t), x^i_2(t)$ in einer Karte $(\mathcal{O},\Phi)$ sind **äquivalent**, wenn sie (i) einen gemeinsamen Startpunkt $x^i_0=x^i(0)$ haben, und (ii) der Tangentenvektor v^i beider Kurven am Startpunkt x^i_0 gleich ist: $\boxed{x^i_1(t)\sim x^i_2(t) \Leftrightarrow \left(x^i_1(0)=x^i_2(0)=x^i_0\right)\wedge\left(v^i_1(0)\overset{\text{def}}{=}\dot x^i_1(0)=\dot x^i_2(0)\overset{\text{def}}{=}v^i_2(0)=v^i_0\right)}$ … (1) Zwei äquivalente Kurven in einer Karte $(\mathcal{O},\Phi)$ sind auch in einer anderen Karte $(\tilde{\mathcal{O}},\tilde\Phi)$ äquivalent: $\boxed{x^i_1(t)\sim x^i_2(t) \Leftrightarrow \tilde x^i_1(t)\sim\tilde x^i_2(t)}$. Bew: Sei $\psi^i(x^k)=\tilde x^i(x^k)$ … (2); $\psi\colon x^i\mapsto\tilde x^i$ die Kartenwechselabbildung. (i) trivial: $x^i_1(0)=x^i_2(0)=x^i_0 \Longrightarrow \tilde x^i_1(0)=\tilde x^i_2(0)=\psi^i(x^k_0)$ ✓ (ii) (2) $\Longrightarrow \tilde x^i(x^k(t))=\psi^i(x^k(t)) \Longrightarrow$ $\tilde v^i_1=\dot{\tilde x}^i_1=\frac{\partial}{\partial t}\psi^i(x^k(t))=(\psi^i)'(x^m_1(t))\cdot\dot x^k_1(t)=\frac{\partial\psi^i}{\partial x^k}(x^m_1(t))\cdot\dot x^k_1(t)^{*}\overset{(2)}{=}\frac{\partial\tilde x^i}{\partial x^k}(x^m_1(t))\cdot\dot x^k_1(t)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial\tilde x^i}{\partial x^k}(x^m_1(t))\cdot v^k_1(t)\,\Big\vert\, t\overset{!}{=}0 \Longrightarrow$ $\tilde v^i_1(0)=\frac{\partial\tilde x^i}{\partial x^k}(x^m_1(0))\cdot v^k_1(0)\overset{(1)}{=}\frac{\partial\tilde x^i}{\partial x^k}(x^m_0)\cdot v^k_0$ … (3) analog: $\tilde v^i_2(0)=\frac{\partial\tilde x^i}{\partial x^k}(x^m_2(0))\cdot v^k_2(0)\overset{(1)}{=}\frac{\partial\tilde x^i}{\partial x^k}(x^m_0)\cdot v^k_0\overset{(3)}{\Longrightarrow}\tilde v^i_1(0)=\tilde v^i_2(0)$ ✓ *Zum besseren Verständnis: Darstellung in Vektorschreibweise in $\mathbb{R}^3$: $\vec{\tilde v}=\dot{\vec{\tilde x}}=\frac{\partial}{\partial t}\vec\psi(\vec x(t))=\frac{\partial\vec\psi}{\partial\vec x}(\vec x)\cdot\dot{\vec x}(t)=\underbrace{D\vec\psi(\vec x)}_{\substack{Fréchet-\\Ableitng}}\cdot\dot{\vec x}(t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}&\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2}&\frac{\partial\psi^1}{\partial x^3}\\\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1}&\frac{\partial\psi^2}{\partial x^2}&\frac{\partial\psi^2}{\partial x^3}\\\frac{\partial\psi^3}{\partial x^1}&\frac{\partial\psi^3}{\partial x^2}&\frac{\partial\psi^3}{\partial x^3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{\mathrm{x}}^1(t)\\\dot{\mathrm{x}}^2(t)\\\dot{\mathrm{x}}^3(t)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}\dot{\mathrm{x}}^1(t)+\frac{\partial\psi^1}{\partial x^2}\dot{\mathrm{x}}^2(t)+\frac{\partial\psi^1}{\partial x^3}\dot{\mathrm{x}}^3(t)\\\frac{\partial\psi^2}{\partial x^1}\dot{\mathrm{x}}^1(t)+\frac{\partial\psi^2}{\partial x^2}\dot{\mathrm{x}}^2(t)+\frac{\partial\psi^2}{\partial x^3}\dot{\mathrm{x}}^3(t)\\\frac{\partial\psi^3}{\partial x^1}\dot{\mathrm{x}}^1(t)+\frac{\partial\psi^3}{\partial x^2}\dot{\mathrm{x}}^2(t)+\frac{\partial\psi^3}{\partial x^3}\dot{\mathrm{x}}^3(t)\end{pmatrix}^{i}}_{\frac{\partial\psi^i}{\partial x^k}(x^m(t))\cdot\dot{\mathrm{x}}^k(t)}$
Trafo Tang.vektorkomponent.	$\Longrightarrow$ Vektorkomponenten v^k im Pkt $x^m_0\cong p$ transformieren kontravariant*: (3) $\Longrightarrow \boxed{\tilde v^i=\frac{\partial\tilde x^i(x^m_0)}{\partial x^k}v^k=\frac{\partial\tilde x^i}{\partial x^k}\Big\vert_p v^k}=\underline{\underline{J}}^i_k(x^m_0)\,v^k$ *… Merke: kontravariante Transformation = "Tilde oben"
Trafo Basisvektoren	$\Longrightarrow$ Die Basisvektoren transformieren kovariant** (Penrose-Notation): $\boxed{\tilde E^a_\beta=\frac{\partial x^\alpha(\tilde x^\gamma_0)}{\partial\tilde x^\beta}E^a_\alpha}=\left(\underline{\underline{J}}^{-1}\right)^\alpha_\beta(x^\gamma_0)\,E^a_\alpha$ **…"Tilde unten" Bew: $v^a=v^\alpha E^a_\alpha=\tilde v^\beta\tilde E^a_\beta$ … (1) $\tilde v^\alpha=\frac{\partial\tilde x^\alpha(x^\gamma_0)}{\partial x^\beta}v^\beta\overset{\tilde v\leftrightarrow v}{\Longrightarrow}v^\alpha=\frac{\partial x^\alpha(\tilde x^\gamma_0)}{\partial\tilde x^\beta}\tilde v^\beta\overset{(1)}{\Longrightarrow}\frac{\partial x^\alpha(\tilde x^\gamma_0)}{\partial\tilde x^\beta}\tilde v^\beta E^a_\alpha=\tilde v^\beta\tilde E^a_\beta\overset{KV\ \tilde v^\beta}{\Longrightarrow}\tilde E^a_\beta=\frac{\partial x^\alpha(\tilde x^\gamma_0)}{\partial\tilde x^\beta}E^a_\alpha$ ■
Differentialoperator	Definition: $\partial_i\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial x^i}$ … hängt von der jeweiligen Karte ab: $\partial_i\big\vert_{x^m_0}\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big\vert_{x^m_0}$ und $\tilde\partial_i\big\vert_{\tilde x^m_0}\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial\tilde x^i}\Big\vert_{\tilde x^m_0}$
Trafo Diff.-operator ∂_i	$\boxed{\tilde\partial_i=\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^i}\partial_k=\tilde\partial_i x^k\partial_k}=\left(\underline{\underline{J}}^{-1}\right)^k_i(x^m_0)\,\partial_k\big\vert_{x^m_0}$ *Bew.:* $\tilde\partial_i\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial}{\partial\tilde x^i}=\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^i}\frac{\partial}{\partial x^k}\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^i}\partial_k$ (alles an der Stelle x^m_0) Differentialoperatoren ∂_i transformieren wie Basisvektoren E_i kovariant $\Longrightarrow \partial_i$ <u>sind</u> Basisvektoren
Trafo Vektorkomponenten	$v^a=v^k\underbrace{\partial^a_k}_{Basis}=\tilde v^i\tilde\partial^a_i=\tilde v^i\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^i}\partial^a_k\overset{KV\ \partial^a_k}{\Longrightarrow}v^k=\tilde v^i\frac{\partial x^k}{\partial\tilde x^i}\overset{\tilde v\leftrightarrow v}{\Longrightarrow}\boxed{\tilde v^k=v^i\frac{\partial\tilde x^k}{\partial x^i}}$ … Vektorkomponenten transformieren kontravariant

Anhang: SRT, 4er Formalismus, Minkowski-Metrik

Beta und Gamma	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$; $\beta = \frac{v}{c}$	In d Raumdimensionen bzw. D Raumzeitdimensionen gibt es d Boosts und $\frac{d(d+1)}{2} = \frac{D(D-1)}{2}$ Rotationen. Rotationen gehören zur Gruppe $SO(d)$. Postulate: Konstanz von c, kein bevorzugtes IS.
Lorentz-transfor-mation:	Sei S' das „bewegte" System, und S das „ruhende" System; d.h. die Geschwindigkeit und die Richtung von S' gegenüber S bestimmen die Größe und das Vorzeichen von β.	**Aktive LT:** Wie sieht „bewegtes" S' im „ruhenden" S aus? $\boldsymbol{a^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a'^\nu}$ — **Passive LT:** Wie sieht „ruhendes" S im „bewegten" S' aus? $\boldsymbol{a'^\mu = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu}$

Aktive LT Boost in x, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in y, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Aktive LT Boost in z, $S' \to S$:	$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	Eigenschaften: $\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ $\det(\Lambda) = +1$
Passive LT Boost in x, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in y, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & -\beta\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Passive LT Boost in z, $S \to S'$:	$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$	$\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ $\mathcal{L}_+^\uparrow \in SO(3,1)^\uparrow$ Lorentzgruppe orthochron
Drehung:	**Aktive Drehung**: Objekt wird in festem Koordinatensystem gedreht.			**Passive Drehung**: Das Koordinatensystem wird gedreht.		
Aktive Drehung um x:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um y:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Aktive Drehung um z:	$D^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Passive Drehung um x:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um y:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$	Passive Drehung um z:	$\tilde{D}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Rapidität:	$\xi = \operatorname{artanh}(\beta) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E+c\lvert\vec{p}\rvert}{E-c\lvert\vec{p}\rvert}\right)$	$\beta = \tanh(\xi)$	$\gamma = \cosh(\xi)$	$\beta\gamma = \sinh(\xi)$	$\xi_{ges} = \xi_1 + \xi_2$	$v_{ges} = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$

Einfache LT's à la GDPH 1	Ort: $x = \gamma(x' + vt')$ $y = y'$ $z = z'$ — $x' = \gamma(x - vt)$ $y' = y$ $z' = z$	Geschw.	$v_x = \frac{v_x'+v}{1+v_x'\frac{v}{c^2}}$; $v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1+v_x'\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_z = \frac{v_z'}{\gamma\left(1+v_x'\frac{v}{c^2}\right)}$ $v_x' = \frac{v_x - v}{1-v_x\frac{v}{c^2}}$; $v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1-v_x\frac{v}{c^2}\right)}$; $v_z' = \frac{v_z}{\gamma\left(1-v_x\frac{v}{c^2}\right)}$	
Zeitpunkt:	$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$	Dauer: $\tau = \gamma\tau_0$ Masse: $m = \gamma m_0$	Länge: $l = \frac{l_0}{\gamma}$	Frequenz $f_B = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$; $f_R = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$; $f_{traversal} = \frac{f_0}{\gamma}$
Invariante:	$ds^2 = \eta_{ij}\,dx^i\,dx^j = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; $ds^2 > 0$: zeitartig, Kausalität; $ds^2 < 0$: raumartig; $ds^2 = 0$: lichtartig.			
Energie:	$E = E_0 + E_{kin} = m_0c^2 + mc^2 - m_0c^2 = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$; $E_{kin} = E - E_0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$			
	$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = E_0^2 \ldots invariant$			

4er Formalismus mit Minkowski-Metrik

4er-Vektor kontravariant	$a^\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$	4er-Gradient	$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$	Quabla:	$\Box = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta$	Minkowski-metrik (kar-th. Koord.):	$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; $\det(\eta_{\mu\nu}) = -1$ — 4er-Vektoren u. Tensoren und ihre Skalarprodukte sind Lorentz-invariant.

Index unten ⇔ „kovariant", Index oben ⇔ „kontravariant". Indexwechsel ko/kontra in Metrik(+,-,-,-) ⇒ Vorzeichenwechsel bei a_1, a_2, a_3

Rechenregeln	$\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$	$a_\mu = \eta_{\mu\nu}a^\nu$	$a^\mu = \eta^{\mu\nu}a_\nu$	$A^{\mu\nu} = A^\mu{}_\beta\eta^{\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha}A_{\alpha\beta}\eta^{\beta\nu}$	$A_{\mu\nu} = A_\mu{}^\beta\eta_{\beta\nu} = \eta_{\mu\alpha}A^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu}$
	$A^{\mu\nu}{}_\downarrow B^{\mu\uparrow}{}_\nu = A^\mu{}_\beta\eta^{\beta\nu}B^\mu{}_\nu = A^\mu{}_\beta B^{\mu\beta} = A^\mu{}_\nu B^{\mu\nu}$				

Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{3,1}$: $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = \boldsymbol{a}^T\eta\,\boldsymbol{b} = a^\mu\eta_{\mu\nu}b^\nu = a_\mu b^\mu$

Jeder Tensor 2. Stufe kann in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden: $A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu})$

4er-Ortsvektor (kontravariant)	$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$	Eigenzeit τ in S': $ds^2 = ds'^2 \Rightarrow c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\,d\tau^2 \Rightarrow d\tau^2 = \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)dt^2 \Rightarrow \boxed{d\tau = \frac{1}{\gamma}dt}$
4er-Geschw. (kontravariant)	$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix}$;	$u^\mu u_\mu = \gamma^2(c^2 - \vec{v}^2) = c^2 > 0 \Rightarrow$zeitartig
4er-Beschleunigung (kontravariant)	$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} = \gamma\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} c\,\gamma^3\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2} \\ \gamma^3\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c} \\ \gamma^4\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v} + \gamma^2\vec{a} \end{pmatrix}$	Beschleunigung nur in x-Richtung: $a^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4\frac{a_x v_x}{c} \\ \gamma^4 a_x \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 \\ a_x' \end{pmatrix} = \tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu a^\nu \Rightarrow a_x' = \gamma^3 a_x$ * ; $a^\mu u_\mu = 0 \Rightarrow a^\mu \perp u^\mu$	$a^\mu a_\mu = -\tilde{a}^2 < 0 \Rightarrow$raumartig. ($\tilde{a}$…3er-Beschl. des IS, in dem $\vec{v}$=0)
4er-Impuls (kontravariant)	$p^\mu = m_0u^\mu = m_0\begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0c + \frac{E_{kin}}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$; $p^\mu p_\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 \equiv \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2c^2 \ldots invariant$	Masseteilchen: $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$ masselose Teil.: $E = \lvert\vec{p}\rvert c = hf; \vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}$
4er-Kraft (kontravariant)	$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma\frac{dp^\mu}{dt} = \begin{pmatrix} F^0 \\ \gamma\vec{F} \end{pmatrix} = m_0a^\mu$	$\vec{F} = m_0\gamma\vec{a} + m_0\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\vec{v}$ (für $m_0 = const.$) $\Rightarrow \vec{F} \nparallel \vec{a}$ (außer $\vec{v} \parallel \vec{a}$ $\vee$ $\vec{v} \perp \vec{a}$)