

Laborübungen II

im Wintersemester 2016 LABORPROTOKOLL

Gruppe

19

Name

Punkte

Name	Punkte	
Helmut Hörner		
Kassandra Kunz		

Prüfung

Protokoll

Titel der Übung

Drehpendel

Datum

Mi. 30. Nov. 2016

Betreuer

(Name in Blockbuchstaben und Unterschrift)

Inhalt

1	Einleitung	2
2	Grundlegender Versuchsaufbau	2
3	Freie Schwingung bei geringstmöglicher Dämpfung	3
3.1	Bestimmung der Eigenfrequenz und der systemimmanenten Dämpfungskonstante	3
3.1.1	Messmethode	3
3.1.2	Messungen	3
3.1.3	Bestimmung der Eigenfrequenz und der systemimmanenten Dämpfungskonstante	5
3.1.4	Interpretation	9
3.2	Phasenverschiebung von Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung	10
3.2.1	Messmethode	10
3.2.2	Messung	10
3.2.3	Bestimmung der Phasenverschiebungen	11
3.2.4	Interpretation	12
4	Messungen bei verschiedenen Dämpfung	13
4.1.1	Messmethode	13
4.1.2	Messungen	13
4.1.3	Ermittlung der Periodendauern bei unterschiedlichen Dämpfungen	16
4.1.4	Ermittlung der Dämpfungskonstanten	17
4.1.5	Fehlerrechnung bezüglich der Dämpfungskonstanten	17
4.1.6	Interpretation	19
5	Zusammenhang Erregerfrequenz / Erregerspannung	20
5.1	Messmethode	20
5.2	Messergebnis	20
6	Resonanzkurven bei gedämpften, erzwungenen Schwingungen	22
6.1	Messmethode	22
6.2	Messungen	22
6.3	Interpretation	24
7	Anhang	26
7.1	Verwendetes Equipment	26
7.2	Tabellenverzeichnis	26
7.3	Abbildungsverzeichnis	26
7.4	Literaturliste	27

1 Einleitung

Die in diesem Protokoll beschriebenen Experimente betrachten das Schwingungsverhalten eines Drehpendels, sowohl in freier Schwingung, als auch unter erzwungener Schwingung, jeweils unter verschiedenen Dämpfungsbedingungen. Die verschiedenen Dämpfungszustände wurden dabei mit Hilfe einer Wirbelstrombremse realisiert.

Die gewonnenen Messergebnisse werden dabei mit den zu erwartenden Ergebnissen des Modells der gedämpften harmonischen Schwingung mit winkelgeschwindigkeitsproportionaler Dämpfung verglichen.

2 Grundlegender Versuchsaufbau

In der folgenden Versuchsreihe wurde ein Drehpendel nach Pohl genutzt (Drehpendel [EQ-DP]). Der Pendelkörper ist ein Kupferrad, welches in seiner Symmetrieachse gelagert ist. Weiters ist an der Nabe und der Schubstange (die mit dem Übertragungshebel verbunden ist) des Pendelkörpers eine Spiralfeder befestigt. Diese Feder bewirkt bei Auslenkung des Pendels ein Rückstellmoment und es werden harmonische mechanische Schwingungen um den Mittelpunkt beobachtet.

Der Versuchsaufbau inkludiert eine Wirbelstrombremse mit einem Elektromagneten. Durch Regelung der Stromstärke im Elektromagneten kann die Dämpfung eingestellt werden.

Darüber hinaus ist ein Treibermotor (ein Gleichstrommotor) mit dem Übertragungshebel verbunden. Durch das von diesem Motor erzeugte Drehmoment können erzwungene Schwingungen angeregt werden.

Der Magnet der Wirbelstrombremse und der Treibermotor wurden durch ein regelbares externes Netzgerät (mit Strom- und Spannungsausgang) versorgt.

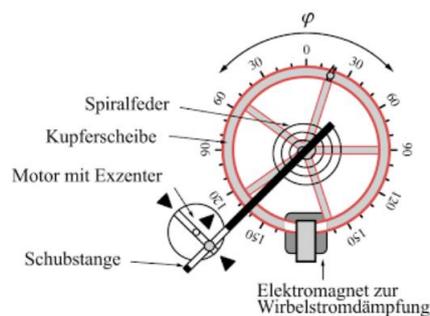


Abbildung 1: Drehpendel nach Pohl, ohne Auswertelektronik
(aus: [Schenk et al, 2013], Seite 53)

Im Stromkreis für den Magneten der Wirbelstrombremse wurde das Amperemeter [EQ-MM1] in Serie geschaltet. Der Gleichstrommotor ist mit einem integrierten Potentiometer stufenlos regelbar. Die am Motor anliegende Spannung wurde mit [EQ-MM2] gemessen.

Die Bewegung des Drehpendels wurde mittels des Bewegungsmesswandlers [BMW] erfasst und an das Softwaresystem [CASSY] zur Erfassung weitergeleitet.

Zur quantitativen Erfassung und Dokumentation wurde das Softwaresystem [CASSY] auf einem gewöhnlichem Windows-Computer verwendet. Die Bewegung des Drehpendels wurde mittels des Bewegungsmesswandlers [BMW] erfasst und an das Softwaresystem [CASSY] zur Erfassung weitergeleitet.

Ist das Pendel angeregt, werden die Unterbrechungen der Lichtschranke im [BMW] als digitales Signal an [CASSY] übertragen. [CASSY] stellt die empfangenen Daten als Funktion der Zeit dar und ermöglicht eine Darstellung des Verlaufs. Es können einzelne Werte ausgelesen und bei Bedarf auch mathematische Operationen durchgeführt werden.

3 Freie Schwingung bei geringstmöglicher Dämpfung

3.1 Bestimmung der Eigenfrequenz und der systemimmanenten Dämpfungskonstante

3.1.1 Messmethode

Bei dieser Messreihe wurde das Pendel manuell bis zum Vollausschlag ausgelenkt und dann losgelassen. Motor und Wirbelstrombremse waren deaktiviert. Vor Versuchsbeginn wurde das Drehpendel zentriert.

Die Messung wurde mit [BMW] und [CASSY] durchgeführt und dokumentiert.

Es wurde erwartet, dass die entstehende Schwingung dem Modell des frei schwingenden, harmonischen Oszillators mit geringer winkelgeschwindigkeitsproportionaler Dämpfung entspricht.

3.1.2 Messungen

Die folgenden drei Abbildungen zeigen die mit [BWM] und [CASSY] erfassten Rohmessergebnisse der drei durchgeführten Messreihen im „ungedämpften“ System; d.h. im System mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung. Das Messintervall betrug jeweils 20ms.

Messung 1:

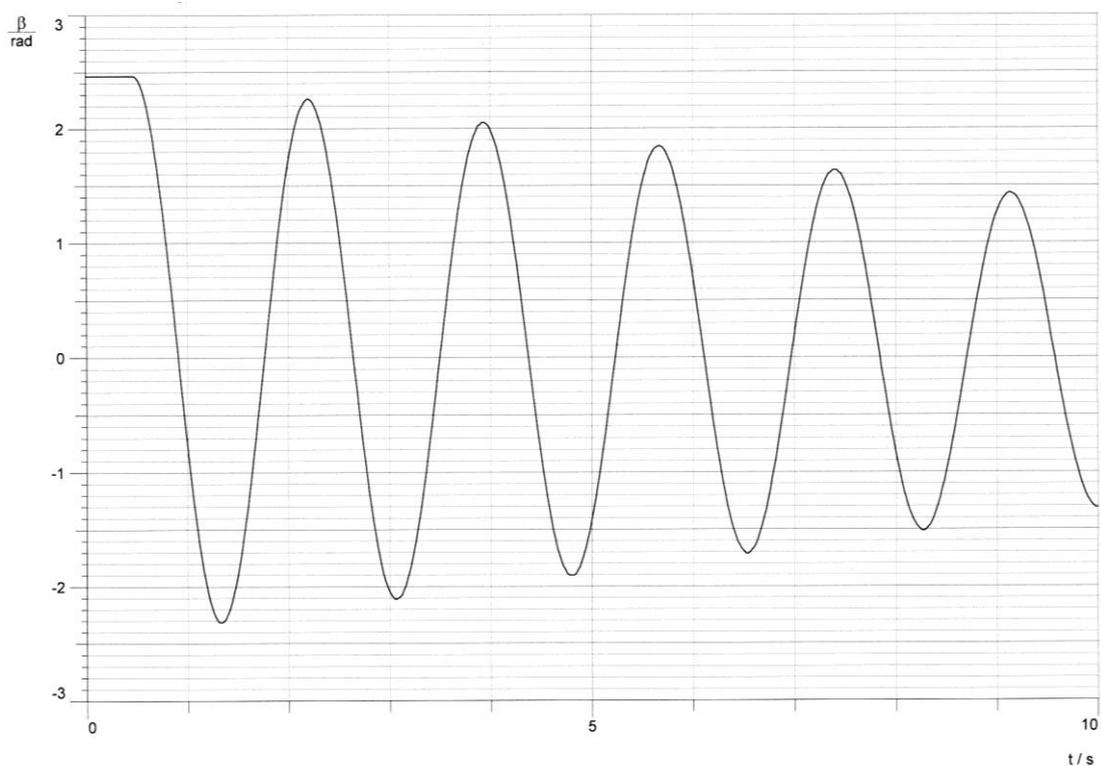


Abbildung 2:
Freie Schwingung mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung; erste Messung

Messung 2:

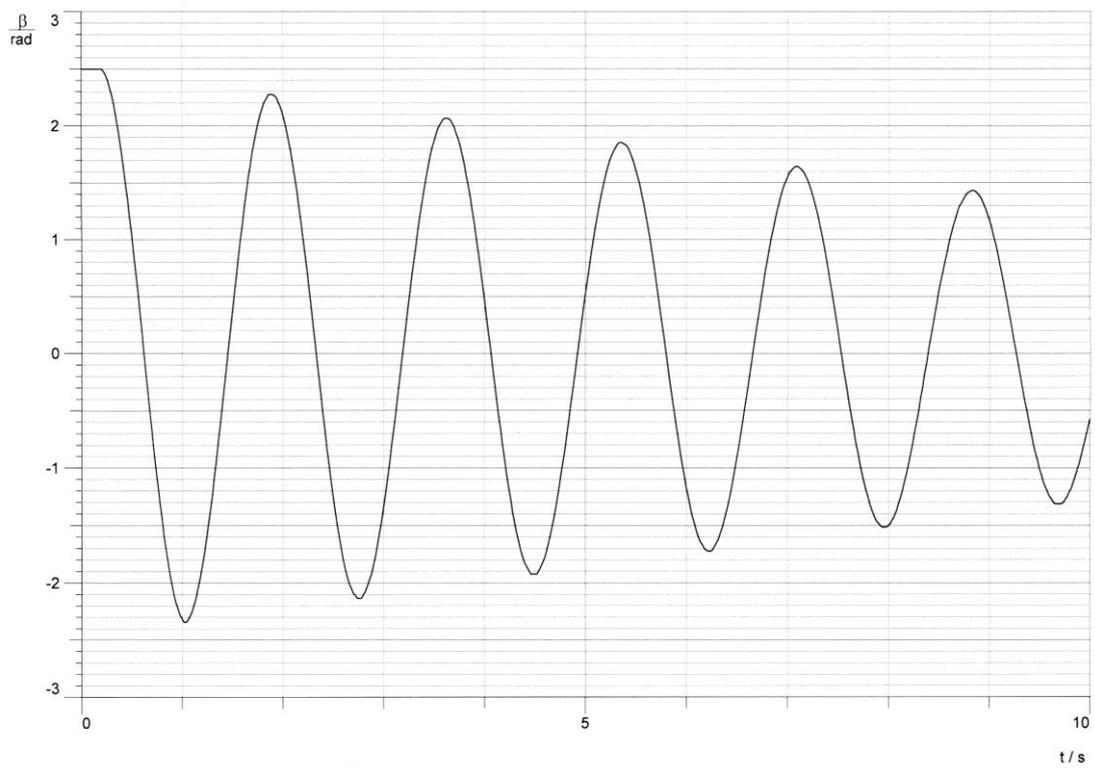


Abbildung 3:
Freie Schwingung mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung; zweite Messung

Messung 3:

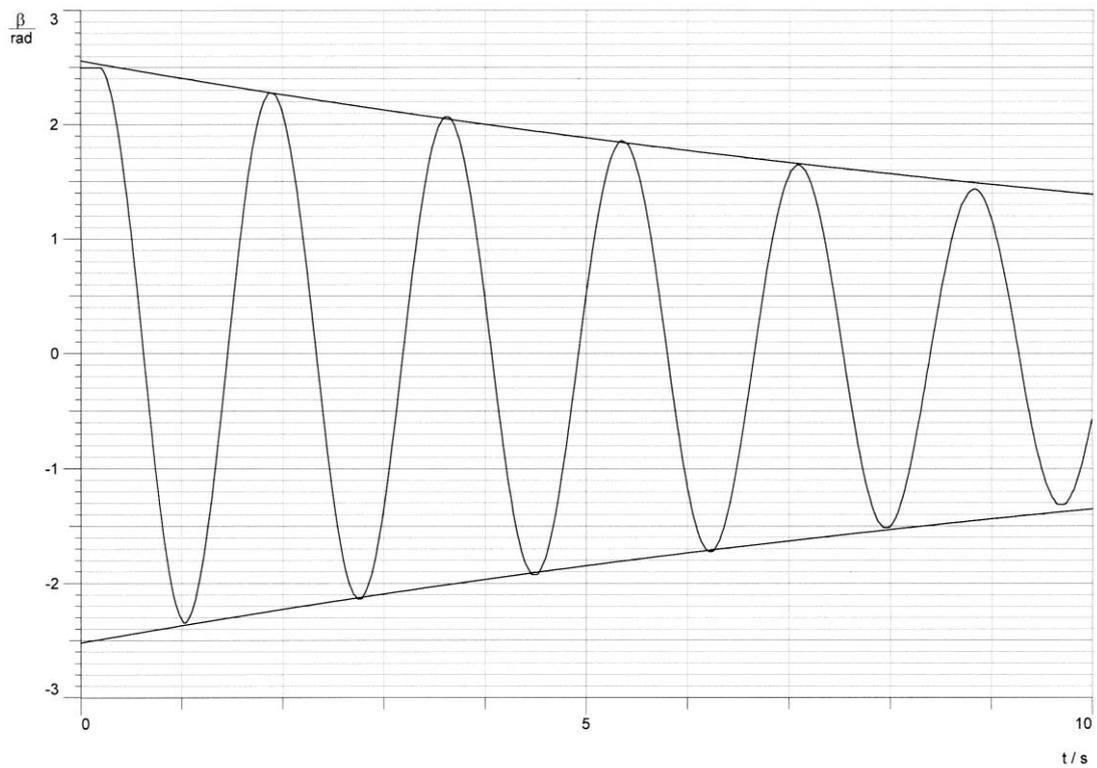


Abbildung 4:
Freie Schwingung mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung; dritte Messung.
Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.

3.1.3 Bestimmung der Eigenfrequenz und der systemimmanenten Dämpfungskonstante

3.1.3.1 Allgemeines

Die Periodendauer T jeder Messreihe wird durch Messung der Dauer Δt über n Perioden in Bezug auf den Nulldurchgang wie folgt ermittelt:

$$T = \frac{\Delta t}{n} \quad (1)$$

Daraus ergibt sich die Frequenz als:

$$f = \frac{1}{T} \quad (2)$$

Dämpfungsdekrement k ist definiert als das Dekrement zwischen zwei benachbarten Amplituden¹:

$$k = \frac{A_i}{A_{i+1}} \quad (3)$$

Um k genauer zu bestimmen, wurde das Dekrement zwischen mehreren Amplituden gemessen. Bei einem Abstand von j Perioden gilt¹:

$$k = \frac{A_i}{\sqrt{A_{i+j}}} \quad (4)$$

Unter Annahme einer winkelgeschwindigkeitsproportionalen Dämpfung ist k eine Konstante und hängt mit der Dämpfungskonstante δ wie folgt zusammen¹:

$$k = e^{\delta T} \quad (5)$$

Daraus ergibt sich:

$$\delta = \frac{1}{T} \ln(k) \quad (6)$$

¹ vgl.: [Demtröder, 2015], Seite 335ff.

3.1.3.2 Ermittlung von Periodendauer und Frequenz

Für die in Kapitel 3.1.2 dargestellten Messdaten ergeben sich pro Messreihe folgende Werte:

Messung	1. Null-durchgang	n-ter Null-durchgang	Zeit-Differenz	Anzahl Perioden	Periodendauer <i>siehe Formel (1)</i>	Frequenz <i>siehe Formel (2)</i>
i	$t_1 [s]$	$t_n [s]$	$\Delta t = t_n - t_1 [s]$	n	$T [s]$	$f [Hz]$
1	0,93	9,60	8,67	5	1,734	0,5767
2	0,63	9,28	8,65	5	1,730	0,5780
3	0,63	9,28	8,65	5	1,730	0,5780
Mittelwerte:			8,66	5	1,731	0,5777

Tabelle 1: Messung von Periodendauer und Frequenz bei freier Schwingung ohne zusätzliche Dämpfung

3.1.3.3 Fehlerrechnung bezüglich Periodendauer und Frequenz

Dies ist die Fehlerrechnung für Δt und T :

Messung	Zeitdifferenz	Streuung
i	$\Delta t [s]$	$(\Delta t_i - \overline{\Delta t})^2 [s^2]$
1	8,67	0,0001
2	8,65	0,0001
3	8,65	0,0001
$\sum(\Delta t_i - \overline{\Delta t})^2$		0,0003

Tabelle 2: Streuungen bei der Periodenmessung (ungedämpft)

Die Varianz s^2 der Messreihe in Bezug auf Δt beträgt somit²:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum (\Delta t_i - \overline{\Delta t})^2 = \frac{1}{3} 0,0003 = 0,0001 s^2 \quad (7)$$

Daraus ergibt sich für die Grundgesamtheit die folgende Standardabweichung $\sigma_{\Delta t}$ ²:

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{\frac{N}{N-1} s^2} = \sqrt{\frac{3}{3-1} 0,0001} = \pm 0,0122 s \quad (8)$$

Da immer über $n=5$ Perioden gemessen wurde, beträgt die Standardabweichung σ_T für die Periodendauer T :

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\Delta t}}{n} = \frac{0,0122}{5} = \pm 0,0024 s \quad (9)$$

² vgl.: [Demtröder, 2015], Seite 26ff

Dass Messergebnis für die Periodendauer T lautet daher:

$$T = (1,731 \pm 0,002) \text{ s} \quad (10)$$

Der Zusammenhang zwischen Periodendauer T und Frequenz f ist durch Gleichung (2) gegeben. Durch eine Fehlerfortpflanzungsrechnung erhält man für die Frequenz f die Standardabweichung σ_f ²:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial T}(\bar{T})\right)^2 \sigma_T^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{\bar{T}^2}\right)^2 \sigma_T^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{1,731^2}\right)^2 0,0024^2} = \pm 0,0008 \text{ Hz} \quad (11)$$

Dass Messergebnis für die Frequenz f der minimal gedämpften Schwingung lautet daher:

$$f = (0,5777 \pm 0,0008) \text{ Hz} \quad (12)$$

3.1.3.4 Ermittlung der systemimmanenten Dämpfungskonstante

Für die in Kapitel 3.1.2 dargestellten Messdaten ergeben sich pro Messreihe folgende Werte:

Messung	Messzeitpunkt von A_1	Amplitude A_1	Messzeitpunkt A_5	Amplitude A_5	Dekrement <i>siehe Formel (4)</i>	Dämpfungskonstante <i>siehe Formel (6)</i>
i	t_1 [s]	A_1 [rad]	t_5 [s]	A_5 [rad]	k	δ [s^{-1}]
1	2,21	2,28	9,13	1,43	1,1237	0,06737
2	1,89	2,28	8,83	1,43	1,1237	0,06737
3	1,92	2,28	8,84	1,43	1,1237	0,06737
Mittelwerte:		2,28		1,43	1,1237	0,06737

Tabelle 3: Messung der systemimmanenten Minimaldämpfung

Zur Berechnung der letzten Spalte mittels Formel (6) wurde als Wert für die Periodendauer T stets der in (12) ermittelte Wert $T = 1,731 \text{ s}$ eingesetzt.

Zusätzlich wurde bei der dritten Messung die Abklingzeit $B=1/\delta$ mit Hilfe von CASSY bestimmt. Das Ergebnis:

$$B = 16,18 \text{ s} \quad (13)$$

Daraus ergibt sich die Dämpfungskonstante mit

$$\delta_{\text{CASSY}} = \frac{1}{B} = \frac{1}{16,18} = 0,0618 \text{ s}^{-1} \quad (14)$$

3.1.3.5 Fehlerrechnung bezüglich der Dämpfungskonstanten

Da die direkten Messergebnisse für A_1 und A_5 gem. Tabelle 3 keine Abweichung zeigen, kann für diese Werte keine Fehlerrechnung durchgeführt werden. Es wird ersatzweise vorsichtig angenommen, dass die Standardabweichungen σ_{A_1} und σ_{A_5} für die Amplituden A_1 und $A_5 \pm 0,01 \text{ rad}$ beträgt.

Der Zusammenhang zwischen Dekrement k und den Amplituden A_1 und A_5 ist durch Gleichung (4) gegeben. Durch folgende Fehlerfortpflanzungsrechnung erhält man für das Dekrement k die Standardabweichung σ_k :

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial A_1}(A_1)\right)^2 \sigma_{A_1}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial A_5}(A_5)\right)^2 \sigma_{A_5}^2} \\ \sigma_k &= \sqrt{\left(\frac{1}{4\bar{A}_5} \left(\frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_5}\right)^{-\frac{3}{4}}\right)^2 \sigma_{A_1}^2 + \left(-\frac{\bar{A}_1}{4\bar{A}_5^2} \left(\frac{\bar{A}_1}{\bar{A}_5}\right)^{-\frac{3}{4}}\right)^2 \sigma_{A_5}^2} \\ \sigma_k &= \sqrt{\left(\frac{1}{4 \cdot 1,43} \left(\frac{2,28}{1,43}\right)^{-\frac{3}{4}}\right)^2 0,01^2 + \left(-\frac{2,28}{4 \cdot 1,43^2} \left(\frac{2,28}{1,43}\right)^{-\frac{3}{4}}\right)^2 0,01^2} \\ \sigma_k &= \pm 0,002319\end{aligned}\tag{15}$$

Für die Dämpfungskonstante δ hängt mit dem Dekrement k über Formel (6) zusammen. Damit kann die Standardabweichung σ_δ berechnet werden:

$$\begin{aligned}\sigma_\delta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \delta}{\partial k}(\bar{k})\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial T}(\bar{T})\right)^2 \sigma_T^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{k}\bar{T}}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(-\frac{\ln(\bar{k})}{\bar{T}^2}\right)^2 \sigma_T^2} \\ \sigma_\delta &= \sqrt{\left(\frac{1}{1,1237 \cdot 1,731}\right)^2 0,002319^2 + \left(-\frac{\ln(1,1237)}{1,731^2}\right)^2 0,0024^2} \\ \sigma_\delta &= 0,0012 \text{ s}^{-1}\end{aligned}\tag{16}$$

Dass Messergebnis für die systemimmanente Dämpfungskonstante δ lautet daher:

$$\boxed{\delta = (0,067 \pm 0,001) \text{ s}^{-1}}\tag{17}$$

Diese weicht um 1,6% von der in (14) mit CASSY ermittelten Dämpfungskonstante $\delta_{\text{CASSY}} = 0,0618 \text{ s}^{-1}$ ab. Zu deren Genauigkeit liegen nicht ausreichend Informationen vor, offenbar ist sie aber geringer als die Genauigkeit des zuvor ermittelten Wertes (17).

3.1.3.6 Ermittlung der Eigenfrequenz

Mit zunehmender Dämpfung weicht die Schwingungsfrequenz f der gedämpften harmonischen Schwingung von der Eigenfrequenz f_0 ab. Es gilt³:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\tag{18}$$

³ [Demtröder, 2015], Seite 335

und somit

$$f_0 = \sqrt{f^2 - \frac{\delta^2}{4\pi^2}} \quad (19)$$

Einsetzen der Werte (12) und (17) ergibt:

$$f_0 = \sqrt{0,5777^2 - \frac{0,067^2}{4\pi^2}} = 0,5776 \text{ Hz} \quad (20)$$

Dieser Wert ist nur um 0,0001 Hz geringer als die Frequenz f . Da die Varianz der Frequenz f in (12) mit $\pm 0,0008 \text{ Hz}$ bestimmt wurde, kann der Wert von f als Wert der Eigenfrequenz f_0 angenommen werden:

$$\boxed{f_0 = f = (0,5777 \pm 0,0008) \text{ Hz}} \quad (21)$$

3.1.4 Interpretation

Die freie Schwingung des Drehpendels bei schwacher Dämpfung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$I \ddot{\varphi}(t) = -r \dot{\varphi}(t) - k \varphi(t) \quad (22)$$

Hierbei stellt φ den Auslenkungswinkel, I das Trägheitsmoment, r die (winkelgeschwindigkeitsproportionale) Dämpfungskonstante und k die Federkonstante dar.

Unter Berücksichtigung der im Experiment realisierten Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$, sowie unter Berücksichtigung der schwachen Dämpfung, lautet die Lösung der Differentialgleichung:

$$\varphi(t) = e^{-\delta t} \cos(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}; 2\delta = \frac{r}{I} \quad (23)$$

Diese Bewegungsgleichung wird durch die im Experiment beobachtete Bewegung sehr gut abgebildet. Eine kleine Divergenz ergibt sich jedoch im Hüllkurvenverlauf, wie besonders in Abbildung 4 ersichtlich ist. Offenbar folgt die Hüllkurve nicht vollständig einer Exponentialfunktion, was darauf hindeutet, dass die im Modell verwendete winkelgeschwindigkeitsproportionale Dämpfung die Realität nicht gänzlich beschreibt.

3.2 Phasenverschiebung von Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

In dem in diesem Unterkapitel beschriebenen Experiment wurden die Phasenverschiebungen zwischen Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung beobachtet.

3.2.1 Messmethode

Die in 3.1.1 beschriebene Messmethode wurde unverändert angewendet. Zusätzlich jedoch wurden in [CASSY] zusätzlich zur Auslenkung β die Winkelgeschwindigkeit $[\omega]$ als Ableitung der Auslenkung, und die Winkelbeschleunigung $[a]$ Ableitung der Winkelgeschwindigkeit eingetragen. Eine grafische Darstellung und Erfassung aller Daten der Schwingung in einem bestimmten Zeitintervall erfolgt dann durch die Software automatisch durch numerische Derivation und kann direkt ausgelesen werden. Die Phasenverschiebungen zwischen Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit und Beschleunigung erfolgte durch Bestimmung der Zeitdifferenzen der Nulldurchgänge im abfallenden Zweig der jeweiligen Kurven.

3.2.2 Messung

Die folgende Abbildung zeigt das Rohmessergebnis der durchgeführten Messung im „ungedämpften“ System; i.e. im System mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung. Das Messintervall betrug 200ms.

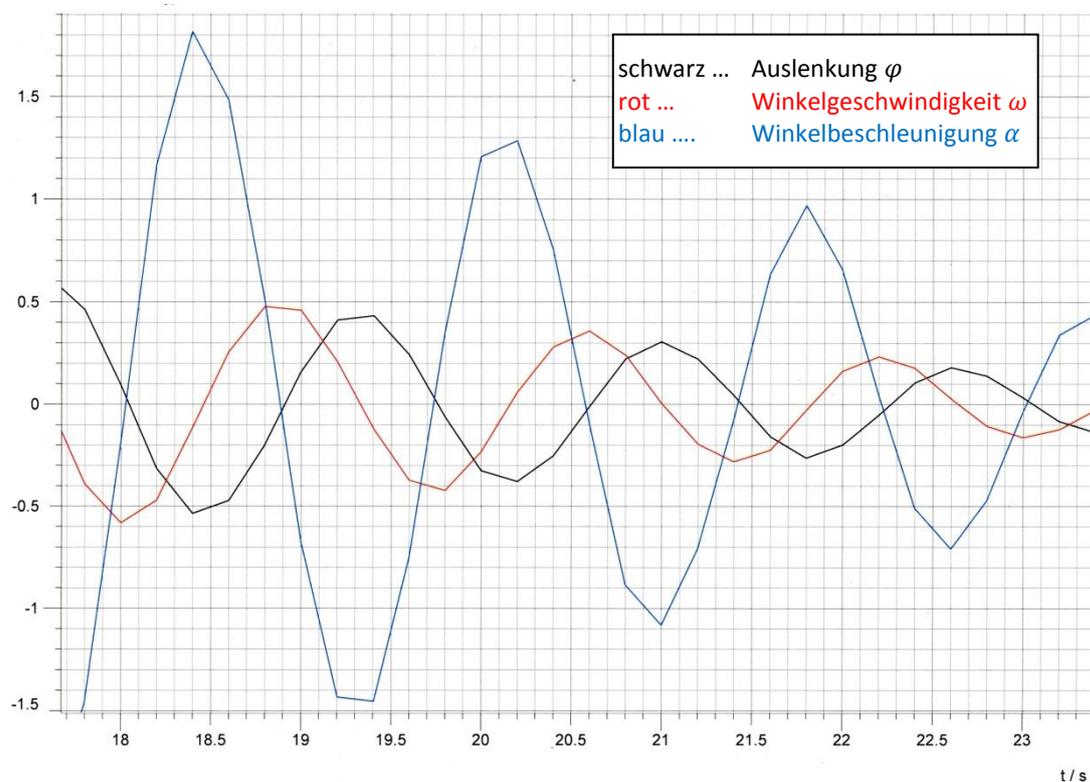


Abbildung 5: Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

3.2.3 Bestimmung der Phasenverschiebungen

3.2.3.1 Messung

Die Bestimmung der Phasenverschiebung φ_ω zwischen Winkelgeschwindigkeit ω und Auslenkung β erfolgt durch Messung der Zeitdifferenz Δt_ω , welche als Zeitdifferenz zwischen dem ersten abfallenden Nulldurchgang der Winkelgeschwindigkeit (**rote Linie**) und dem ersten abfallenden Nulldurchgang der Auslenkung (schwarze Linie) definiert sei.

Es gilt:

$$\varphi_\omega = \frac{\Delta t_\omega}{T} \cdot 360^\circ \quad (24)$$

Analog erfolgt die Bestimmung der Phasenverschiebung φ_α zwischen Winkelbeschleunigung α und Auslenkung β durch Messung der Zeitdifferenz Δt_α , welche als Zeitdifferenz zwischen dem ersten abfallenden Nulldurchgang der Winkelbeschleunigung (**blaue Linie**) und dem ersten abfallenden Nulldurchgang der Auslenkung (schwarze Linie) definiert sei.

Es gilt:

$$\varphi_\alpha = \frac{\Delta t_\alpha}{T} \cdot 360^\circ \quad (25)$$

Dies sind die entsprechend ausgewerteten Messergebnisse:

Nulldurchgang β	Nulldurchgang ω	Nulldurchgang α	Zeitdifferenz $t_\omega^0 - t_\beta^0$	Zeitdifferenz $t_\alpha^0 - t_\beta^0$	Phasenver. ω <i>siehe Formel (24)</i>	Phasenver. α <i>siehe Formel (25)</i>
t_β^0 [s]	t_ω^0 [s]	t_α^0 [s]	Δt_ω [s]	Δt_α [s]	φ_ω [°]	φ_α [°]
18,056	19,338	18,881	1,282	0,825	266,7°	171,6°

3.2.3.2 Fehlerabschätzung

Eine genaue Fehlerrechnung ist nicht möglich, da der in CASSY implementierte numerische Algorithmus zur Berechnung von Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung aus den Rohdaten nicht bekannt ist. Wenn man das Messintervall von $\Delta t_m = 0,2s$ zur oberen Abschätzung der Messgenauigkeit für Δt_ω und Δt_α heranzieht, dann gilt:

$$\sigma_{\varphi_\omega} < \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_\omega}{\partial T}(\bar{T})\right)^2 \Delta t_m^2} = \sqrt{\left(-\frac{\Delta t_\omega}{\bar{T}^2} \cdot 360^\circ\right)^2 \Delta t_m^2} \quad (26)$$

$$\sigma_{\varphi_\omega} < \sqrt{\left(-\frac{1,282}{1,731^2} \cdot 360^\circ\right)^2 0,2^2} = \pm 30,8^\circ$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi_\alpha} &< \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial T}(\bar{T})\right)^2 \Delta t_m^2} = \sqrt{\left(-\frac{\Delta t_\alpha}{\bar{T}^2} \cdot 360^\circ\right)^2 \Delta t_m^2} \\ \sigma_{\varphi_\alpha} &< \sqrt{\left(-\frac{0,825}{1,731^2} \cdot 360^\circ\right)^2 0,2^2} = \pm 19,8^\circ\end{aligned}\quad (27)$$

3.2.4 Interpretation

3.2.4.1 Phasenverschiebung Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit ist definiert als die erste Ableitung des Auslenkungswinkels. Unter Berücksichtigung von Gleichung (24) erhält man daher:

$$\omega = \dot{\varphi} = -e^{-\delta t}(\delta \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) \quad (28)$$

Dies kann umgeschrieben werden zu

$$\omega = -e^{-\delta t}(\sqrt{\delta^2 + \omega^2} \cos(\omega t + \varphi_\omega)) \text{ mit } \varphi_\omega = \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right) \quad (29)$$

Unter Berücksichtigung des negativen Vorzeichens ergibt sich damit eine zu erwartende Phasenverschiebung von

$$\varphi_\omega = 180^\circ + \arctan\left(\frac{\omega}{\delta}\right) = 180^\circ + \arctan\left(\frac{2\pi \cdot 0,5777}{0,067}\right) = 268,9^\circ \quad (30)$$

Dies korreliert sehr gut innerhalb der Messtoleranzen mit dem Messergebnis aus 3.2.3.1 (266,7°).

3.2.4.2 Phasenverschiebung Winkelbeschleunigung

Die Winkelbeschleunigung ist die Ableitung der Winkelgeschwindigkeit. Unter Berücksichtigung von Gleichung (36) erhält man daher:

$$\alpha = \dot{\omega} = e^{-\delta t}((\delta^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\delta\omega \sin(\omega t)) \quad (31)$$

Dies kann umgeschrieben werden zu

$$\alpha = e^{-\delta t}(\sqrt{(\delta^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} \cos(\omega t + \varphi_\alpha)) \text{ mit } \varphi_\alpha = \text{atan2}\left(\frac{2\delta\omega}{\delta^2 - \omega^2}\right) \quad (32)$$

Damit ergibt sich eine zu erwartende Phasenverschiebung von

$$\varphi_\alpha = \text{atan2}\left(\frac{2\delta\omega}{\delta^2 - \omega^2}\right) = \text{atan2}\left(\frac{2 \cdot 0,067 \cdot 2\pi \cdot 0,5777}{0,067^2 - (2\pi \cdot 0,5777)^2}\right) = 177,8^\circ \quad (33)$$

Dies korreliert gut innerhalb der Messtoleranzen mit dem Messergebnis aus 3.2.3.1 (172,6°).

4 Messungen bei verschiedenen Dämpfungen

Im nächsten Schritt wurde mit Hilfe der Wirbelstrombremse die Dämpfung erhöht, um so auch freie harmonische Schwingungen bei mittlerer und starker Dämpfung messen zu können.

Der Kriechfall konnte mit einem maximalen Spulenstrom von 1,5A nicht beobachtet werden; um Schäden am Elektromagneten durch Überhitzung zu vermeiden, wurden keine höheren Bremsströme verwendet.

4.1.1 Messmethode

Die Messmethode gleicht prinzipiell der in Kapitel 3.1.1 beschriebenen, mit dem Zusatz, dass nunmehr Strom durch den Elektromagneten der Wirbelstrombremse geschickt wurde. Der Strom wurde hierbei mit dem Multimeter [EQ-MM1] gemessen, welches zur Spule in Serie geschaltet war.

4.1.2 Messungen

Die folgenden fünf Abbildungen zeigen die Rohmessergebnisse der Versuchsreihen mit gedämpften, freien Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen. Das Messintervall betrug jeweils 20ms.

Messung 1:

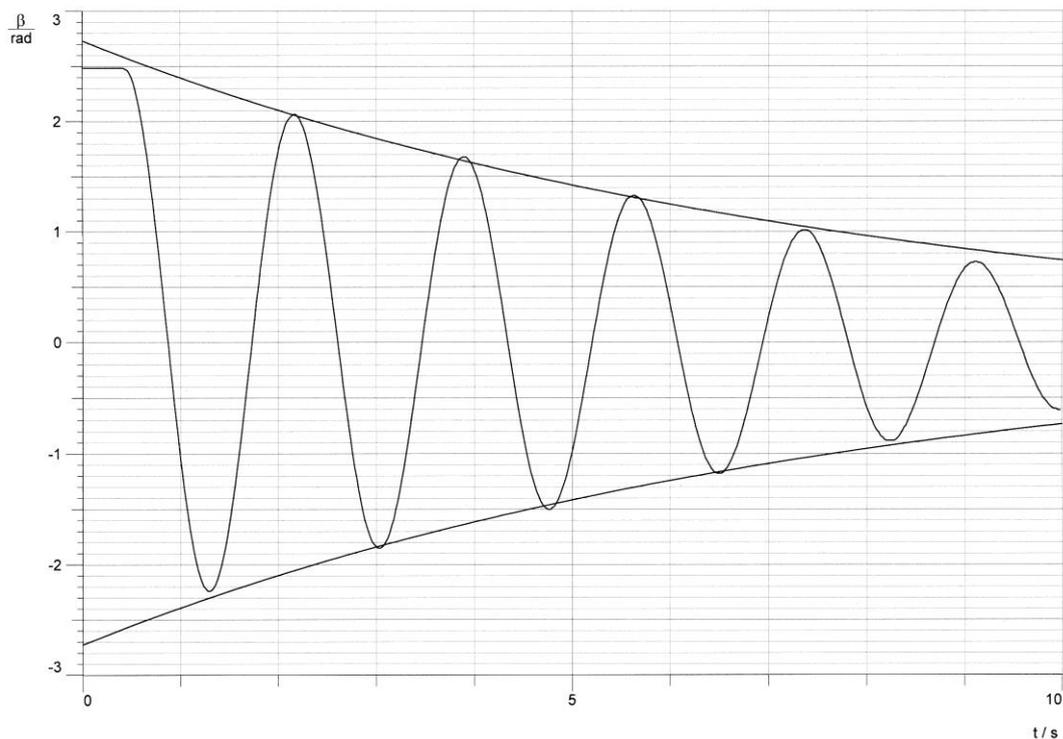


Abbildung 6: Gedämpfte Schwingung mit $I=0,3A$ am Magneten der Wirbelstrombremse. Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.

Messung 2:

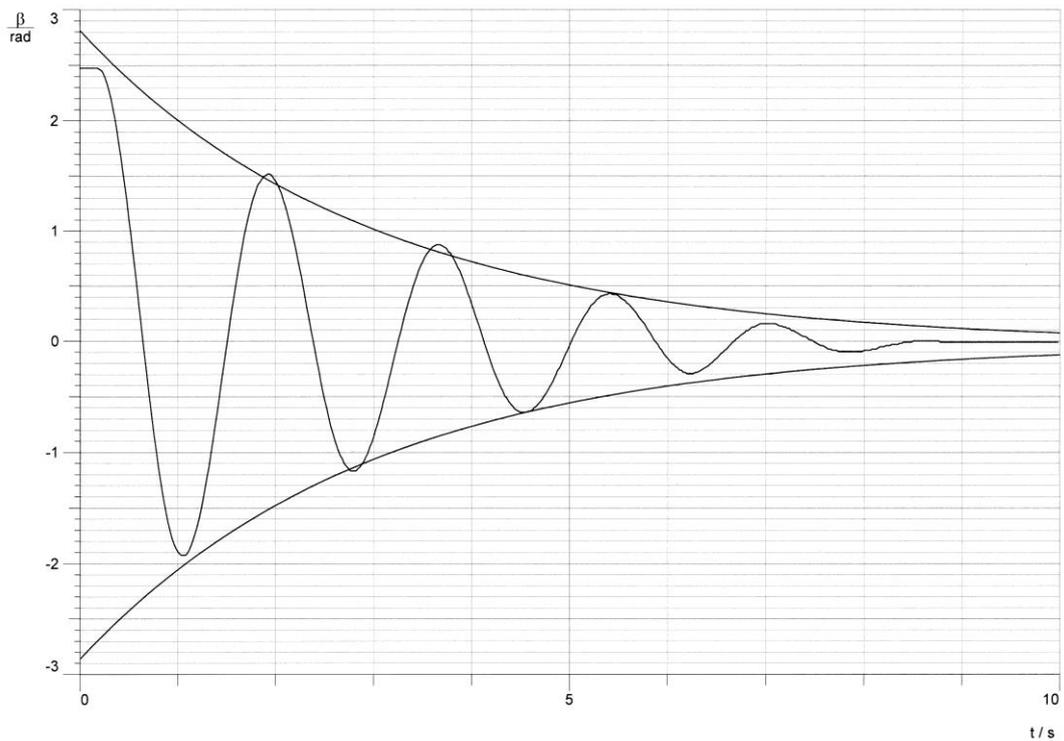


Abbildung 7: Gedämpfte Schwingung mit $I=0,6A$ am Magneten der Wirbelstrombremse. Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.

Messung 3:

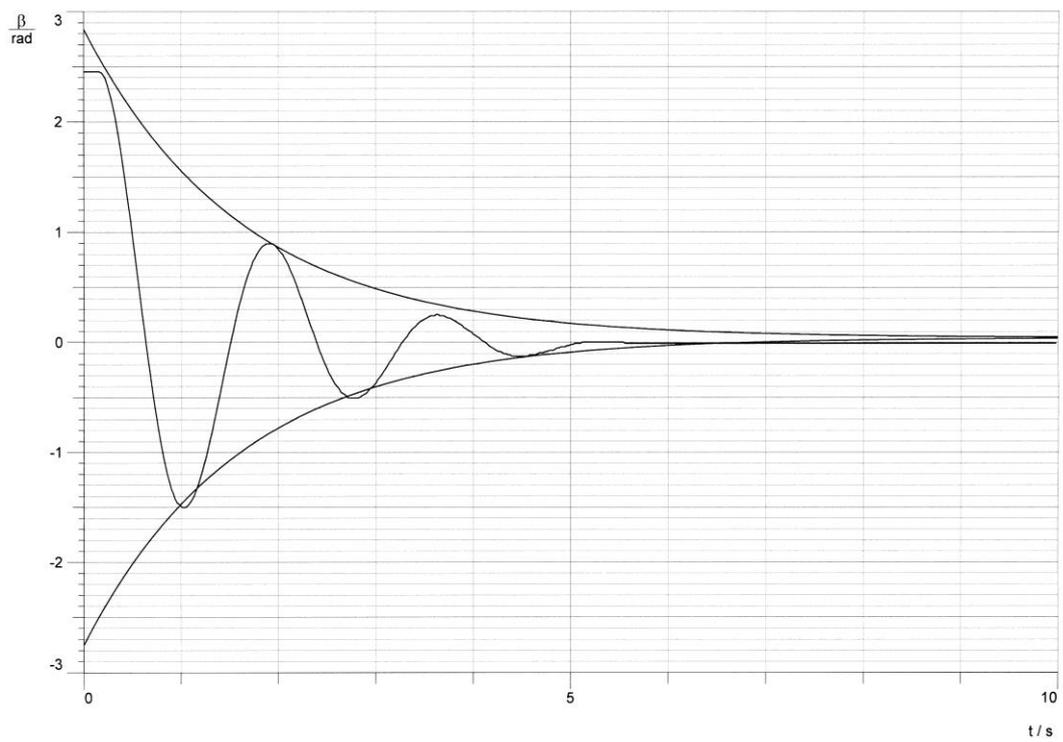


Abbildung 8: Gedämpfte Schwingung mit $I=0,9A$ am Magneten der Wirbelstrombremse. Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.

Messung 4:

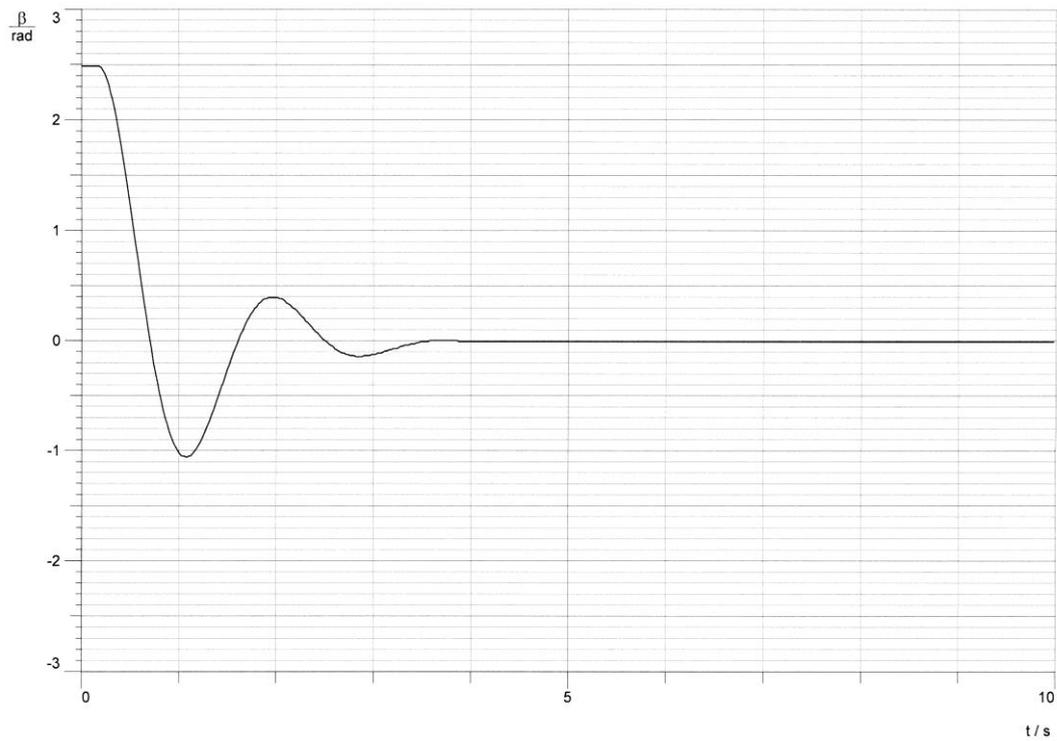


Abbildung 9: Gedämpfte Schwingung mit $I=1,2A$ am Magneten der Wirbelstrombremse.

Messung 5:

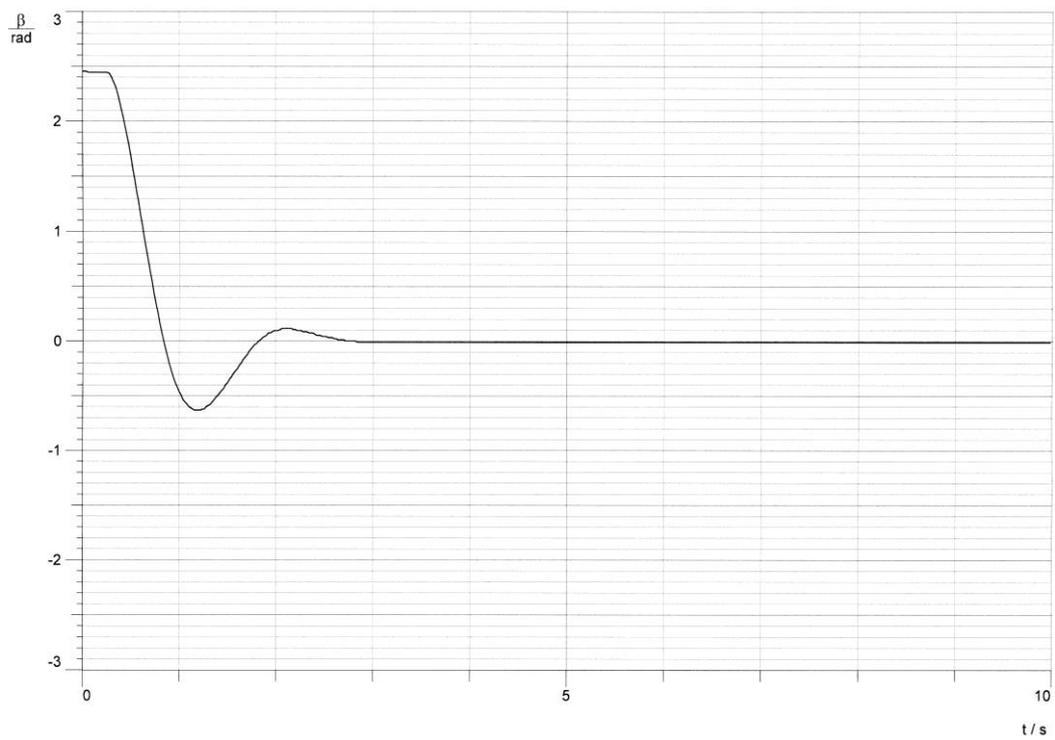


Abbildung 10: Gedämpfte Schwingung mit $I=1,5A$ am Magneten der Wirbelstrombremse.

4.1.3 Ermittlung der Periodendauern bei unterschiedlichen Dämpfungen

Für die im vorigen Kapitel dargestellten Messdaten kann die Periodendauer wie schon in Kapitel 3.1.3.2 beschrieben ermittelt werden. Für eine direkte Abschätzung der Standardabweichung wäre es notwendig, pro Dämpfung mehrere Messreihen durchzuführen. Dies war aus Zeitgründen nicht möglich.

Ersatzweise wird angenommen, dass die Standardabweichung für Δt das dreifache der in (8) ermittelten Standardabweichung beträgt (da sich im Wert (8) die Standardabweichung aus einer Messreihe mit drei Messungen ergibt).

Somit soll gelten:

$$\sigma_{\Delta t} = \pm 0,0366 \text{ s} \quad (34)$$

Bei der Messung über n Perioden gilt daher für die Standardabweichung σ_T der Periodendauer T :

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\Delta t}}{n} = \frac{0,0366 \text{ s}}{n} \quad (35)$$

Strom	1. Null-durchgang	n-ter Null-durchgang	Zeit-Differenz	Anzahl Perioden	Periodendauer <i>siehe Formel (1)</i>	Standardabw <i>siehe Formel (35)</i>
I [A]	t_1 [s]	t_n [s]	$\Delta t = t_n - t_1$ [s]	n	T [s]	σ_T [s]
0,3	0,89	9,58	8,69	5,0	1,738	$\pm 0,0073$
0,6	0,66	5,89	5,23	3,0	1,743	$\pm 0,0122$
0,9	0,66	4,13	3,47	2,0	1,735	$\pm 0,0183$
1,2	0,72	2,52	1,80	1,0	1,800	$\pm 0,0366$
1,5	0,86	1,82	0,96	0,5	1,920	$\pm 0,0732$

Tabelle 4: Periodendauern bei unterschiedlichen Dämpfungen

Die Strommessung erfolgte mit [EQ-MM1] mit einer Genauigkeit von $\pm 1,25\%$ vom Messwert + 0,01A (i.e. 1 Ziffer bei drei angezeigten Stellen).

4.1.4 Ermittlung der Dämpfungskonstanten

Die Dämpfungskonstanten wurden wie in Kapitel 3.1.3.4 beschrieben ermittelt:

Strom	Messzeitpunkt von A_1	Amplitude A_1	Perioden	Messzeitpunkt A_{1+j}	Amplitude A_{1+j}	Dekrement <i>s. Formel (4)</i>	Dämpfung <i>siehe Formel (6)</i>
$I [A]$	$t_1 [s]$	$A_1 [rad]$	j	$t_{1+j} [s]$	$A_{1+j} [rad]$	k	$\delta [s^{-1}]$
0,3	2,17	2,08	4	9,11	0,72	1,3037	0,15260
0,6	1,94	1,52	2	5,42	0,44	1,8586	0,35561
0,9	0,17	2,46	1	1,92	0,90	2,7333	0,57955
1,2	0,17	2,49	1	1,97	0,40	6,2250	1,01587
1,5	0,28	2,44	1	2,14	0,12	20,3333	1,56889

Tabelle 5: Berechnung der Dämpfungskonstante bei unterschiedlichen Dämpfungen

4.1.5 Fehlerrechnung bezüglich der Dämpfungskonstanten

Für die Amplituden A_1 und A_{1+j} gem. Tabelle 5 wird wie in Kapitel 3.1.3.5 eine Standardabweichung $\sigma_{A_1} = \sigma_{A_{1+j}} = \pm 0,01 \text{ rad}$ angenommen.

Der Zusammenhang zwischen Dekrement k und den Amplituden A_1 und A_{j+1} ist durch Gleichung (4) gegeben. Durch folgende Fehlerfortpflanzungsrechnung erhält man für das Dekrement k die Standardabweichung σ_k :

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial A_1}(\overline{A_1})\right)^2 \sigma_{A_1}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial A_{1+j}}(\overline{A_{1+j}})\right)^2 \sigma_{A_5}^2} \quad (36)$$

Für die Dämpfungskonstante δ hängt mit dem Dekrement k über Formel (6) zusammen. Damit kann die Standardabweichung σ_δ berechnet werden:

$$\sigma_\delta = \sqrt{\left(\frac{\partial \delta}{\partial k}(\overline{k})\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial T}(\overline{T})\right)^2 \sigma_T^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\overline{kT}}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(-\frac{\ln(\overline{k})}{\overline{T}^2}\right)^2 \sigma_T^2} \quad (37)$$

Im Gegensatz zur Berechnung in Kapitel 3.1.3.5 sind allerdings für jede Messreihe jeweils unterschiedliche Werte für j und σ_T zu berücksichtigen.

Strom	Dämpfung <i>siehe Tabelle 5</i>	berücksichtigte Perioden <i>siehe Tabelle 5</i>	Standard- abweichung T <i>siehe Tabelle 4</i>	Standard- abweichung k <i>siehe Formel (36)</i>	Standard- abweichung δ <i>siehe Formel (37)</i>
I [A]	δ [s^{-1}]	j	σ_T	σ_k	σ_δ [s^{-1}]
0,3	0,15260	4	$\pm 0,0073$	$\pm 0,0047903$	$\pm 0,0022092$
0,6	0,35561	2	$\pm 0,0122$	$\pm 0,0219880$	$\pm 0,0072293$
0,9	0,57955	1	$\pm 0,0183$	$\pm 0,0323391$	$\pm 0,0091580$
1,2	1,01587	1	$\pm 0,0366$	$\pm 0,1576202$	$\pm 0,0249911$
1,5	1,56889	1	$\pm 0,0732$	$\pm 1,9649238$	$\pm 0,0739327$

Tabelle 6: Dämpfungskoeffizient und zugehörige Standardabweichung bei verschiedenen Spulenströmen

Die folgende Grafik zeigt den quadratischen Zusammenhang zwischen dem Strom I am Elektromagneten der Wirbelstrombremse und der Dämpfungskonstanten δ . Der erste Punkt bei $I = 0A$ ist die in Kapitel 3.1.3.4 ermittelte systemimmanente Dämpfungskonstante

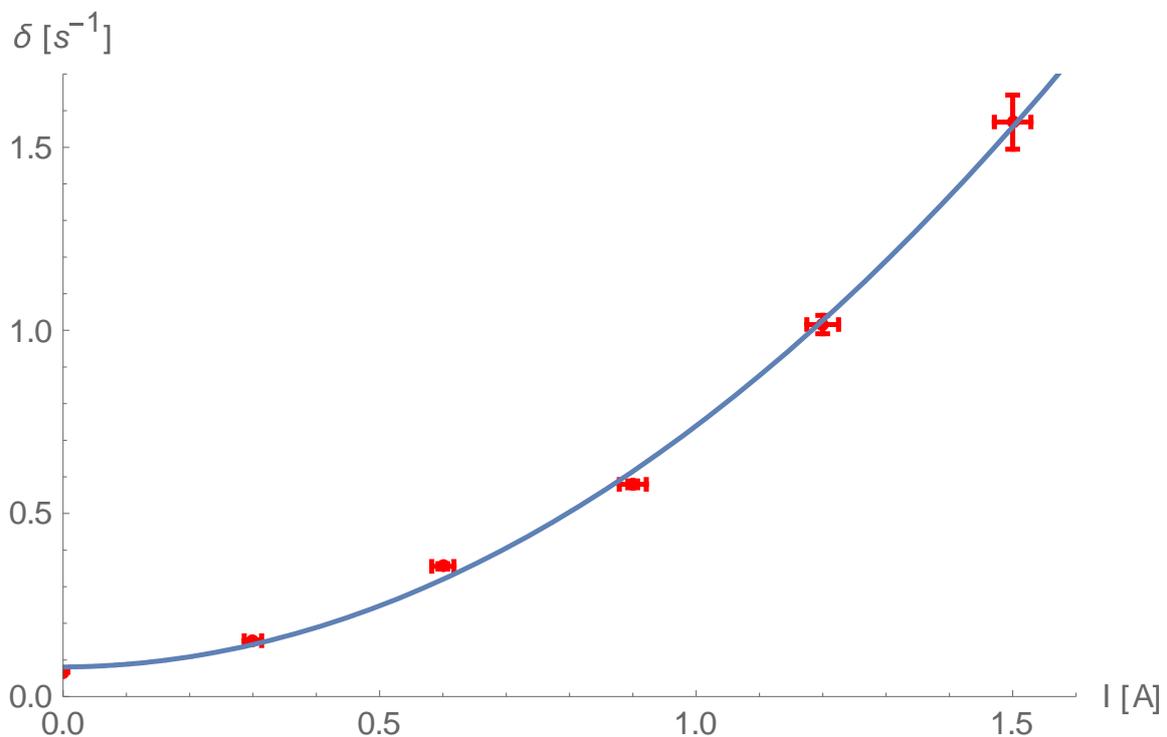


Abbildung 11: Quadratischer Zusammenhang zwischen Spulenstrom und Dämpfung.

Die in der obigen Abbildung gezeigte quadratische Approximation kann durch folgende Gleichung beschrieben werden (wobei I in Ampere einzusetzen ist):

$$\delta(I) = 0,080849 + 0,00912 \cdot I + 0,64924 \cdot I^2 \quad (38)$$

4.1.6 Interpretation

Der quadratische Zusammenhang zwischen Strom an der Bremsspule und der Dämpfung kann wie folgt begründet werden:

Betrachtet man die in einem kleinen Flächenstück, welches normal in das Magnetfeld der Spule eintritt, induzierte Spannung, so gilt:

$$U_{ind} = \frac{d\Theta_{mag}}{dt} = \frac{d}{dt} \int B dA \quad (39)$$

Gehen wir der Einfachheit halber von einem rechteckigen Stück der Breite b aus, dass in ein homogenes Feld B mit der Geschwindigkeit v eintritt, dann ergibt sich daraus:

$$U_{ind} = vbB \quad (40)$$

Für die elektrische Leistung gilt:

$$P_{el} = \frac{U^2}{R} = \frac{v^2 b^2 B^2}{R} \quad (41)$$

Dem gegenüber steht die mechanische Bremsleistung:

$$P_{mech} = Fv \quad (42)$$

Es muss gelten: $P_{mech} = P_{el}$, und somit:

$$Fv = \frac{v^2 b^2 B^2}{R} \quad (43)$$

Daraus folgt:

$$F = \frac{vb^2 B^2}{R} \quad (44)$$

Somit ist $F \propto B^2$. Das Feld B der Spule ist aber direkt proportional zu I ($B \propto I$), und die Dämpfungskonstante proportional zur Bremskraft ($\delta \propto F$).

Somit gilt:

$$\delta \propto F; F \propto B^2; B \propto I \Rightarrow \delta \propto B^2 \quad (45)$$

5 Zusammenhang Erregerfrequenz / Erregerspannung

Um für weitere Experimente in Bezug auf die erzwungene Schwingung ein einfaches Maß für die Erregerfrequenz zu haben, wurde im nächsten Schritt ein Zusammenhang zwischen der Erregerspannung (i.e. der Spannung am Elektromotor), und der Erregerfrequenz hergestellt.

5.1 Messmethode

Die Messung der Erregerfrequenz erfolgte aus Effizienzgründen manuell, d.h. mit Stoppuhr, Papier und Bleistift. Der Übertragungshebel an der Seite des Treibermotors ist auf einer Scheibe befestigt, welche mit einer Markierung versehen ist. Eine weitere fixe Markierung ist auf dem Motor selber angebracht. Dadurch ist es einfach möglich, die Umdrehungen der Scheibe manuell zu zählen.

Mit dieser Messmethode wird vermieden, die Erregerfrequenz indirekt aus der Frequenz des angeregten Drehpendels zu ermitteln, was jeweils das Abwarten langer Einschwingzeiten nötig gemacht hätte.

Es wurde also mit Hilfe des in der Motorregelung integrierten Potentiometers und dem parallel geschalteten Voltmeter [EQ-MM2] die Motorspannung auf einen bestimmten Wert geregelt. Anschließend wurde die Erregerfrequenz wie oben beschrieben ermittelt.

5.2 Messergebnis

Die Genauigkeit der der Zeitmessung mit der Stoppuhr wurde gem. [Wargo, 1967] mit 0,2s angenommen.

Die Frequenz ergibt sich aus der gemessenen Zeit und der Anzahl der Umdrehungen mittels folgender Formel:

$$f = \frac{n}{\Delta t} \tag{46}$$

Durch Fehlerfortpflanzungsrechnung kann die Genauigkeit der so ermittelten Frequenzen wie folgt abgeschätzt werden_

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial t}(n, \Delta t)\right)^2 \sigma_t^2} = \sqrt{\left(-\frac{n}{(\Delta t)^2}\right)^2 \sigma_t^2} \tag{47}$$

Spannung	Messgenauigkeit U	Umdrehungen	Zeit	Messgenauigkeit Δt	Frequenz <i>siehe Formel (46)</i>	Abw. Frequ. <i>siehe Formel (47)</i>
U [V]	σ_U [V]	n	Δt [s]	σ_t [s]	f [Hz]	σ_f [Hz]
5	± 0,05	10	31,9	± 0,2	0,319	± 0,002
10	± 0,10	15	19,4	± 0,2	0,773	± 0,008
15	± 0,15	20	16,5	± 0,2	1,212	± 0,015
20	± 0,20	25	14,9	± 0,2	1,678	± 0,020

Tabelle 7: Zusammenhang zwischen Erregerspannung und Erregerfrequenz

Zwischen Erregerspannung und Erregerfrequenz herrscht ein streng linearer Zusammenhang:

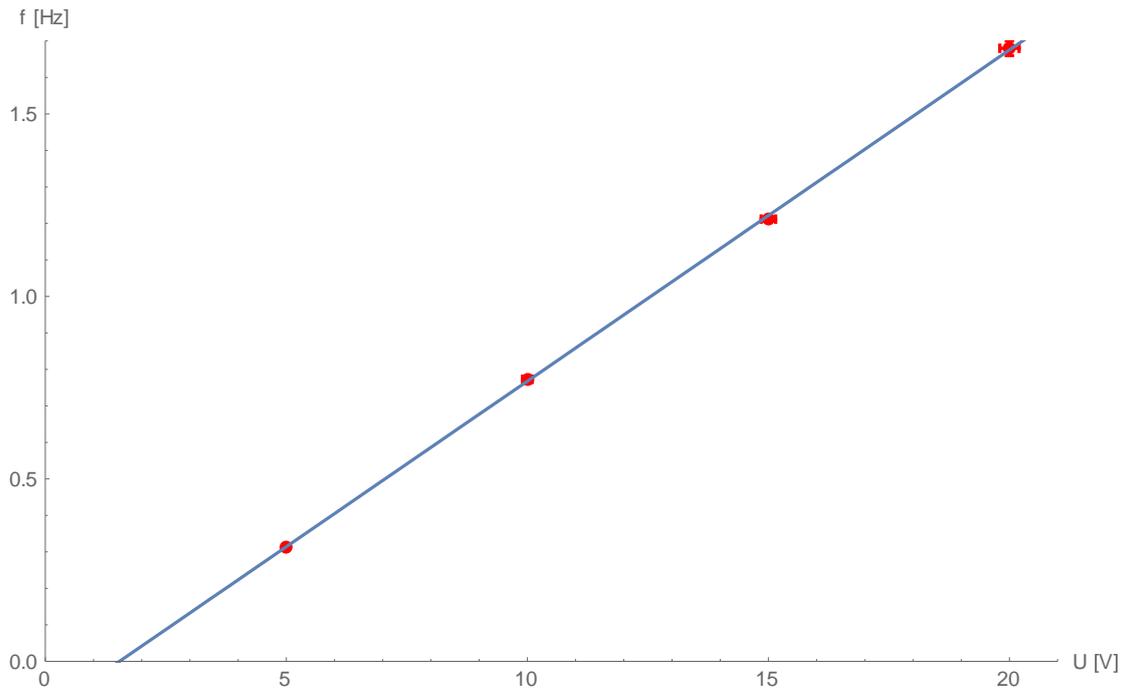


Abbildung 12: Linearer Zusammenhang zwischen Erregerspannung und Erregerfrequenz

Der Zusammenhang kann mit der folgenden „Best-Fit“-Geradengleichung beschrieben werden:

$$f(U) [Hz] = 0,0912 U[V] - 0,16 \quad (48)$$

Auch die Standardabweichung der Frequenz kann (noch ohne Berücksichtigung des Messfehlers bei der Spannungsmessung) als Gerade dargestellt werden:

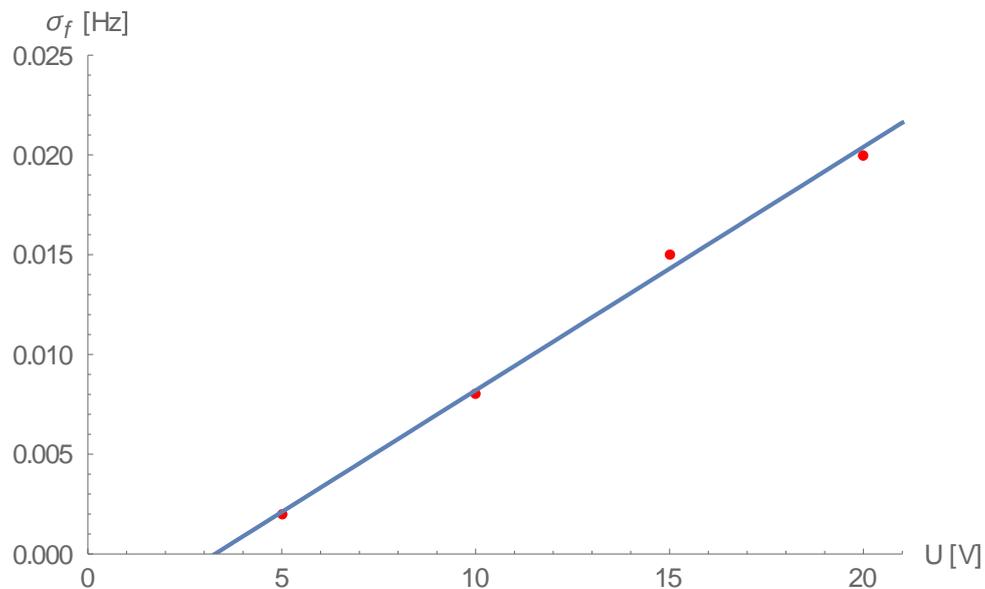


Abbildung 13: Linearer Zusammenhang zwischen Erregerspannung und Standardabweichung der Frequenz

Der Zusammenhang kann mit der folgenden „Best-Fit“-Geradengleichung beschrieben werden:

$$\sigma_f(U) [Hz] = 0,00122 U[V] - 0,004 \quad (49)$$

Das bedeutet, dass die Standardabweichung bei einer bestimmten gemessenen Spannung U mit folgender Gleichung in die Standardabweichung der Frequenz umgerechnet werden kann:

$$\sigma_{f_{ges}}(U) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial U}(U)\right)^2 \sigma_U^2 + \sigma_f(U)^2} \tag{50}$$

Unter Berücksichtigung, dass der Messfehler des verwendeten Voltmeters $\sigma_U = 0,01U$ beträgt, und unter Einsetzen der Formeln (48) und (49), ergibt sich:

$$\sigma_{f_{ges}}(U) = \sqrt{0,0974^2(0,01U)^2 + (0,00122U - 0,04)^2} \tag{51}$$

6 Resonanzkurven bei gedämpften, erzwungenen Schwingungen

Dieses Kapitel beschreibt die Messungen von Resonanzkurven bei erzwungenen Schwingungen und unterschiedlichen Dämpfungen.

6.1 Messmethode

Es wurden drei Messreihen mit folgender Messmethode durchgeführt.

Zunächst wurde an der Bremsspule mit Hilfe des Multimeters [EQ-MM1] ein bestimmter, fixer Strom eingestellt. Dieser Strom entspricht einem bestimmten Dämpfungskoeffizienten, der entweder direkt aus Tabelle 5 abgelesen, oder mittels Gleichung (38) bestimmt werden kann.

Dann wurde der Erregermotor jeweils für jeden Messpunkt mit einer bestimmten Spannung versorgt, die sich mittels Gleichung (48) direkt in eine Erregerfrequenz umrechnen lässt. Die Regelung erfolgte dabei mit Hilfe des im Motor integrierten Potentiometers und dem Voltmeter [EQ-MM2].

Auf dem Bildschirm des Softwaresystems [CASSY] wurde der Einschwingvorgang live beobachtet, und abgewartet, bis sich eine stabile, stationäre Schwingung eingestellt hatte. Danach wurde mit Hilfe von [CASSY] die Amplitude bestimmt. Vor jeder Messreihe wurde das Drehpendel erneut zentriert.

6.2 Messungen

Es wurden die folgenden drei Messreihen erfasst. Die beiden rechten Spalten (Frequenz f und Abweichung σ_f) wurden mittels der Formeln (48) und (51) berechnet.

I=0,15 A			
Spannung	Amplitude	Frequenz	Standardabw.
U [V]	rad	f [Hz]	σ_f [Hz]
3,0	0,06	0,114	± 0,003
4,0	0,08	0,205	± 0,004
5,0	0,10	0,296	± 0,005
6,0	0,13	0,387	± 0,007
6,5	0,17	0,433	± 0,007
7,0	0,24	0,478	± 0,008
7,5	0,33	0,524	± 0,009
7,8	1,47	0,551	± 0,009
8,0	0,87	0,570	± 0,010
9,0	0,22	0,661	± 0,011
10,0	0,11	0,752	± 0,013
12,0	0,07	0,934	± 0,016
15,0	0,03	1,208	± 0,020

Tabelle 8: Erzwungene Schwingung; Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei Dämpfung mit 0,15 A

I=0,3 A			
Spannung	Amplitude	Frequenz	Standardabw.
U [V]	rad	f [Hz]	σ_f [Hz]
3,0	0,06	0,114	± 0,003
4,0	0,07	0,205	± 0,004
5,0	0,09	0,296	± 0,005
6,0	0,13	0,387	± 0,007
7,0	0,22	0,478	± 0,008
7,5	0,30	0,524	± 0,009
7,8	0,60	0,551	± 0,009
8,0	1,04	0,570	± 0,010
8,5	0,46	0,615	± 0,010
9,0	0,24	0,661	± 0,011
10,0	0,12	0,752	± 0,013
12,0	0,06	0,934	± 0,016
15,0	0,02	1,208	± 0,020

Tabelle 9: Erzwungene Schwingung; Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei Dämpfung mit 0,3 A

I=0,6 A			
Spannung	Amplitude	Frequenz	Standardabw.
U [V]	rad	f [Hz]	σ_f [Hz]
3,0	0,06	0,114	± 0,003
4,0	0,07	0,205	± 0,004
5,0	0,09	0,296	± 0,005
6,0	0,12	0,387	± 0,007
7,0	0,19	0,478	± 0,008
7,5	0,25	0,524	± 0,009
7,8	0,29	0,551	± 0,009
8,0	0,32	0,570	± 0,010
8,5	0,28	0,615	± 0,010
9,0	0,21	0,661	± 0,011
10,0	0,12	0,752	± 0,013
12,0	0,06	0,934	± 0,016
15,0	0,03	1,208	± 0,020

Tabelle 10: Erzwungene Schwingung; Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei Dämpfung mit 0,6 A

6.3 Interpretation

Eine erzwungene, harmonische Schwingung mit drehwinkelgeschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wird durch folgende inhomogene Differentialgleichung beschrieben:

$$I \ddot{\varphi}(t) = -r \dot{\varphi}(t) - k \varphi(t) + A_0 \cos(\omega t) \quad (52)$$

Die stationäre Lösung dieser Differentialgleichung ergibt eine Schwingung des Drehpendels mit der Frequenz des Erregers, jedoch mit einer gewissen Phasenverschiebung, die von Eigenfrequenz, Dämpfung und Erregerfrequenz wie folgt abhängt:

$$\tan(\varphi) = -\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (53)$$

Die Amplitude wiederum bestimmt sich aus dem Drehmoment des Erregers, dem Trägheitsmoment des Pendels, sowie der Eigenfrequenz, der Dämpfung und der Erregerfrequenz mit folgendem Zusammenhang⁴:

$$A(f) = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}; a = I/M \quad (54)$$

In den folgenden drei Abbildungen sieht man die gemessenen Abhängigkeiten zwischen Amplitude und Erregerfrequenz (rote Punkte samt Fehlerbalken) im Vergleich zur Kurve, die sich aus Formel (54) ergibt (blaue Kurve). Es wurde dabei die in Kapitel 3.1.3.6 ermittelte Eigenfrequenz, sowie die Dämpfung gem. Tabelle 5 bzw. (für $I=1,5A$) gem. Gleichung (38) eingesetzt.

Eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen dem Modell und der Messung ist feststellbar.

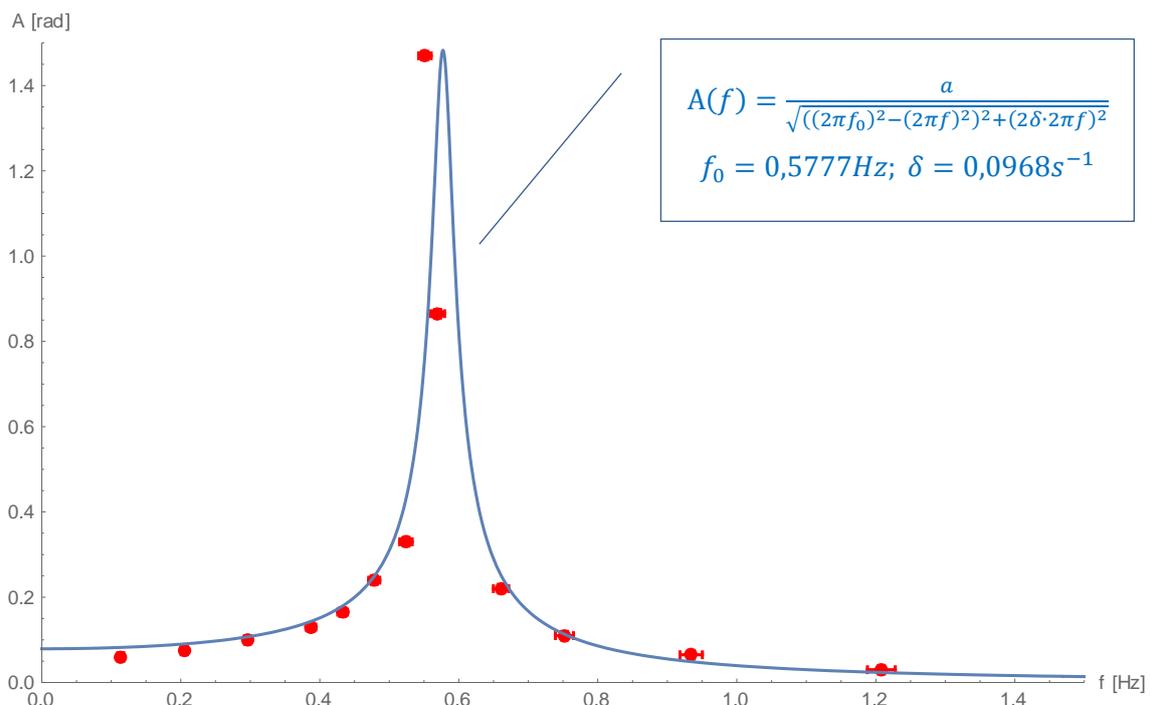


Abbildung 14: Erzwungene Schwingung: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei $I=0,15$ A Dämpfung

⁴ vgl. [Demtröder 2015], Seite 338f

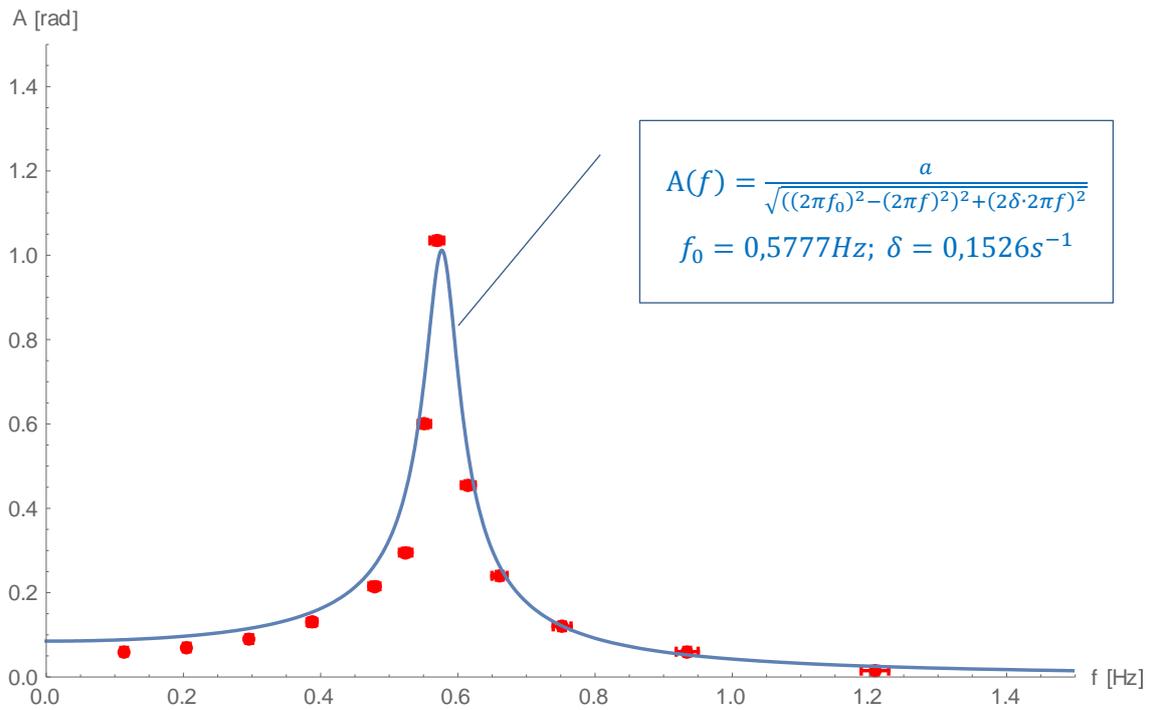


Abbildung 15: Erzwungene Schwingung: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei I=0,3 A Dämpfung

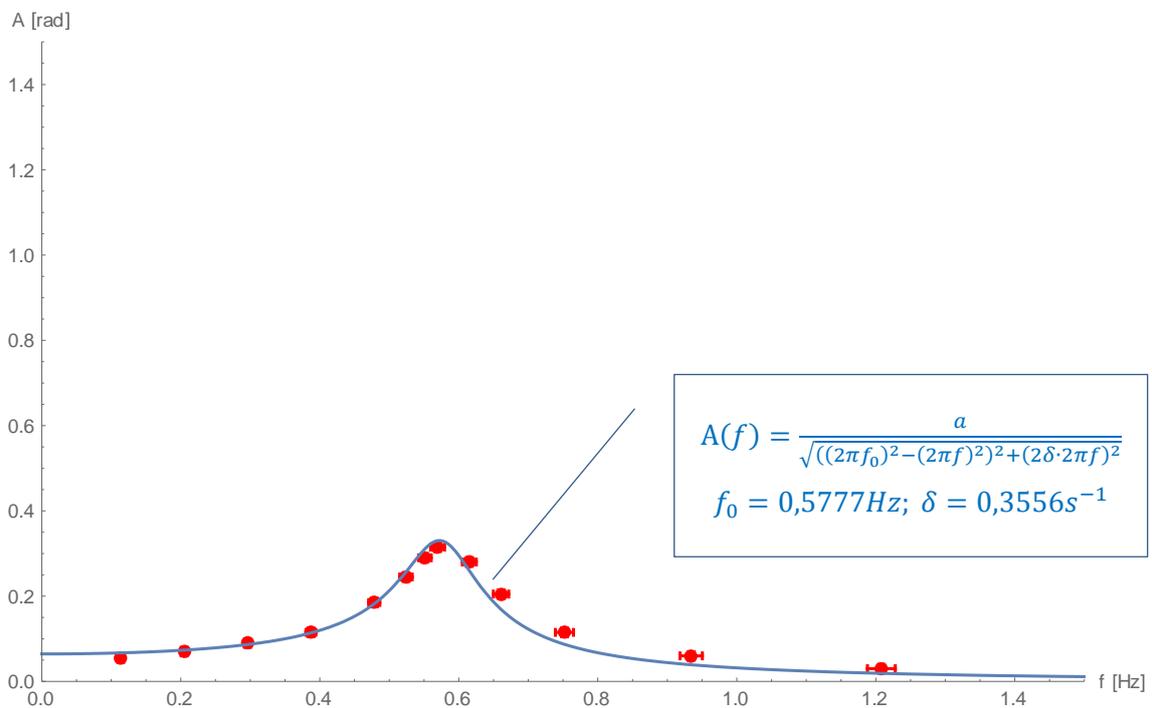


Abbildung 16: Erzwungene Schwingung: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei I=0,6 A Dämpfung

7 Anhang

7.1 Verwendetes Equipment

[BMW]	Bewegungsmesswandler Leybold, Type 524 082
[CASSY]	Software Cassy Lab, Leybold, Type 524 220
[EQ-DP]	Drehpendel nach Pohl, Leybold-Heraeus, Type 34600-B2
[EQ-MM1]	Digitales Multimeter Beckman DM15B, Genauigkeit im verwendeten Messbereich: 1,25% + 1dgt (3 Stellen)
[EQ-MM2]	Analoges Multimeter Goerz Unigor 3n, Genauigkeit 1% im verwendeten Messbereich

7.2 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Messung von Periodendauer und Frequenz bei freier Schwingung ohne zusätzliche Dämpfung	6
Tabelle 2: Streuungen bei der Periodenmessung (ungedämpft)	6
Tabelle 3: Messung der systemimmanenten Minimaldämpfung	7
Tabelle 4: Periodendauern bei unterschiedlichen Dämpfungen.....	16
Tabelle 5: Berechnung der Dämpfungskonstante bei unterschiedlichen Dämpfungen.....	17
Tabelle 6: Dämpfungskoeffizient und zugehörige Standardabweichung bei verschiedenen Spulenströmen.....	18
Tabelle 7: Zusammenhang zwischen Erregerspannung und Erregerfrequenz	20
Tabelle 8: Erzwungene Schwingung; Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei Dämpfung mit 0,15 A	22
Tabelle 9: Erzwungene Schwingung; Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei Dämpfung mit 0,3 A	23
Tabelle 10: Erzwungene Schwingung; Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei Dämpfung mit 0,6 A	23

7.3 Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Drehpendel nach Pohl, ohne Auswertelektronik (aus: [Schenk et al, 2013], Seite 53).....	2
Abbildung 2: Freie Schwingung mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung; erste Messung.....	3
Abbildung 3: Freie Schwingung mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung; zweite Messung	4
Abbildung 4: Freie Schwingung mit geringstmöglicher (systemimmanenter) Dämpfung; dritte Messung. Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.	4
Abbildung 5: Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung.....	10
Abbildung 6: Gedämpfte Schwingung mit $I=0,3A$ am Magneten der Wirbelstrombremse. Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.	13
Abbildung 7: Gedämpfte Schwingung mit $I=0,6A$ am Magneten der Wirbelstrombremse. Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.	14
Abbildung 8: Gedämpfte Schwingung mit $I=0,9A$ am Magneten der Wirbelstrombremse. Die zusätzlich eingezeichnete exponentielle Hüllkurve wurde mit [CASSY] ermittelt.	14
Abbildung 9: Gedämpfte Schwingung mit $I=1,2A$ am Magneten der Wirbelstrombremse.	15
Abbildung 10: Gedämpfte Schwingung mit $I=1,5A$ am Magneten der Wirbelstrombremse.	15
Abbildung 11: Quadratischer Zusammenhang zwischen Spulenstrom und Dämpfung.	18
Abbildung 12: Linearer Zusammenhang zwischen Erregerspannung und Erregerfrequenz	21
Abbildung 13: Linearer Zusammenhang zwischen Erregerspannung und Standardabweichung der Frequenz.....	21
Abbildung 14: Erzwungene Schwingung: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei $I=0,15 A$ Dämpfung	24
Abbildung 15: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei $I=0,3 A$	25
Abbildung 16: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz bei $I=0,6 A$	25

7.4 Literaturliste

- [Demtröder, 2015] Wolfgang Demtröder. Experimentalphysik 1, 7. Auflage. Springer, 2015
- [Schenk et al, 2013] Wolfgang Schenk, Friedrich Kremer, Gunter Beddies, Thomas Franke, Petrik Galvosas, Peter Rieger. Physikalisches Praktikum: Ausgabe 14. Springer, 2013
- [Wargo, 1967] M. J. Wargo: Human operator response speed, frequency and flexibility: A review and analysis. Human Factors, 1967, 9, 221-238