Merkzettel Mechanik

14.02.2017

Kinematik

Feste karthesische Koord.:	$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	Geschwindig.	$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$	Beschleunigung:	$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$
Feste Polarkoordinaten:	$x = r\cos(\varphi)$ $y = r\sin(\varphi)$	$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$; $\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\end{pmatrix}$	$\dot{\vec{e}}_r = \begin{pmatrix}-\dot{\varphi}\sin(\varphi)\\ \dot{\varphi}\cos(\varphi)\end{pmatrix} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$; $\dot{\vec{e}}_\varphi = \begin{pmatrix}-\dot{\varphi}\cos(\varphi)\\ -\dot{\varphi}\sin(\varphi)\end{pmatrix} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$		
$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r$	$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$	$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi - r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$			
Feste Zylinderkoordinaten:	$\vec{r}(t) = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$	$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$	$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$		

Begleitendes Dreibein

Tangentenvektor:	$\vec{e}_t = \frac{d\,\vec{r}(t)}{ds} = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt}\frac{dt}{ds}$	$\vec{r}(t)$... Ortsvektor; s... Bogenlänge			$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\lvert\dot{\vec{r}}(t)\rvert} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}}$;
Hauptnormalvek.:	$\vec{e}_n = \rho\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \rho\frac{d\vec{e}_t}{dt}\frac{dt}{ds}$	Zuerst $\frac{d\vec{e}_t}{dt}\frac{dt}{ds}$ berechnen, dann mit $\vec{e}_n^2 = 1$ Krümmungskreisradius ρ berechnen			
Binormalenvektor	$\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$	Geschw.:	$\vec{v} = \vec{e}_t\frac{ds}{dt}$	Beschl.: $\vec{a} = \dot{\vec{e}}_t\frac{ds}{dt} + \vec{e}_t\frac{d^2s}{dt^2}$	$\frac{ds}{dt} = \lvert\dot{\vec{r}}(t)\rvert = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$

Freiheitsgrade

freier Massepunkt (MP) in Ebene: FG=2	z.B. 2 Massepunkte in Ebene: FG=2·2=4	z.B. 2 MP in Ebene verbunden mit Stange: FG=4-1=3
ein Freier MP im Raum: FG=3	z.B. 2 Massepunkte im Raum: FG=2·3=6	z.B. 2 Massepunkte im Raum verbunden mit Stange: FG=6-1=5
Flaches Objekt in Ebene: FG=3	Flaches Objekt im Raum: FG=6	z.B. Körper im Raum, 1 Punkt fixiert: FG=3

Rotationsmatritzen in $\mathbb{R}^3$

Jede Rotationsmatrix B in $\mathbb{R}^3$ ist Element der Spezielle Orthogonalen Gruppe $SO(3) = \{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \mid \underline{B}^T\underline{B} = \mathbb{1}, \det(\underline{B}) = +1\}$	
Eigenschaften	*orthogonal* $\Leftrightarrow \underline{B} \in \mathbb{R}^{3x3}$; $\underline{B}^T = \underline{B}^{-1} \Leftrightarrow \underline{B}\underline{B}^T = \mathbb{1} \Leftrightarrow \lVert\vec{x}\rVert = \lVert\underline{B}\vec{x}\rVert$; $\det(\underline{B}) = +1$; $\forall\lvert\lambda_i\rvert = 1$; *nicht abelsch* $(\underline{AB} \neq \underline{BA})$ $\underline{B}^T\underline{B} = \underline{S}$ ist schiefsymetrisch $\Leftrightarrow$ nur Nullen in der Hauptdiagonalen $\Leftrightarrow \underline{S} = -\underline{S}^T \Leftrightarrow$ max. n(n-1)/2=3 unabh. Einträge
Dachoperator, Rotations-vektor $\vec{\Omega}$	Sei $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{pmatrix}$ der Rotationsvektor bzgl. des Körperkoordinatensystems. Dann ist $\hat{\vec{\Omega}} = \underline{\Omega} = \begin{pmatrix}0 & -\Omega_3 & \Omega_2\\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1\\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0\end{pmatrix}$
Dachoperator, Rotations-vektor $\vec{\omega}$	Sei $\vec{\omega} = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}$ der Rotationsvektor bzgl. des Raumkoordinatensystems. Dann ist $\hat{\vec{\omega}} = \underline{\omega} = \begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix}$
Beziehungen:	$\underline{B}^T\dot{\underline{B}} = \underline{\Omega} \Leftrightarrow \dot{\underline{B}} = \underline{B}\underline{\Omega}$; $\underline{\Omega}\vec{x} = \vec{\Omega} \times \vec{x}$ | $\underline{\omega} = \mathrm{Ad}_B(\underline{\Omega}) \overset{\text{def}}{=} \underline{B}\underline{\Omega}\underline{B}^{-1} = \underline{B}\underline{\Omega}\underline{B}^T$ $\dot{\underline{B}}\underline{B}^T = \underline{\omega} \Leftrightarrow \dot{\underline{B}} = \underline{\omega}\underline{B}$; $\underline{\omega}\vec{x} = \vec{\omega} \times \vec{x}$ | $\vec{\omega} = \underline{B}\vec{\Omega}$
Elementare Rotationen	$\underline{R}_1(\alpha) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$; $\underline{R}_2(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}$; $\underline{R}_3(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ | $\dot{\underline{R}}_1 = \hat{\vec{e}}_1\underline{R}_1\dot{\alpha}$ $\dot{\underline{R}}_2 = \hat{\vec{e}}_2\underline{R}_2\dot{\alpha}$ $\dot{\underline{R}}_3 = \hat{\vec{e}}_3\underline{R}_3\dot{\alpha}$
Anwendung:	Raumkoord. x,y,z Körperkoord. ξ, η, ζ | $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} = \underline{B}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r} = \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
Eulerwinkel	$\underline{B} = \underline{R}_3(\psi)\,\underline{R}_1(\vartheta)\,\underline{R}_3(\varphi)$ | $\underline{\Omega} = \dot{\varphi}\hat{\vec{e}}_3 + \dot{\vartheta}\hat{\vec{e}}_1 + \dot{\psi}\hat{\vec{e}}_3$ | $\vec{\Omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_3 + \dot{\vartheta}\vec{e}_1 + \dot{\psi}\vec{e}_3$

Bewegung eines starren Körpers

Seien A und P Punkte auf dem starren Körper; $\vec{r}_A$ der Ortsvektor von A im Raumsystem, und $\vec{R}_{PA}$ der Vektor von A nach B im Körpersystem
$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{PA} \mid \vec{r}_{PA} = \underline{B}\vec{R}_{PA} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_P = \vec{r}_A + \underline{B}\vec{R}_{PA}}$
$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\underline{B}}\vec{R}_{PA} \mid \dot{\underline{B}} = \underline{\omega}\underline{B} \Rightarrow \vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_A + \underline{\omega}\underline{B}\vec{R}_{PA} \mid \vec{r}_{PA} = \underline{B}\vec{R}_{PA} \Rightarrow \vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_A + \underline{\omega}\vec{r}_{PA} \mid \underline{\omega}\vec{r}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA}}$
$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \ddot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PA} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{PA} \mid \dot{\vec{r}}_{PA} = \dot{\underline{B}}\vec{R}_{PA} = \underline{\omega}\underline{B}\vec{R}_{PA} = \underline{\omega}\vec{r}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PA})}$

Relativkinematik

Seien A und P Punkte des starren Körpers; $\vec{r}_A(t)$ der Ortsvektor von A im Raumsyst., und $\vec{R}_{PA}(t)$ der Vektor von A nach B im Körpersystem	
$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{PA}(t) \mid \vec{r}_{PA}(t) = \underline{B}(t)\,\vec{R}_{PA}(t) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_P(t) = \vec{r}_A(t) + \underline{B}(t)\,\vec{R}_{PA}(t)}$	
$\vec{v}_P$ in Körper-koordinaten:	$\vec{v}_P = \dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\underline{B}}\vec{R}_{PA} + \underline{B}\dot{\vec{R}}_{PA} \mid \dot{\underline{B}} = \underline{B}\underline{\Omega} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \underline{B}\left(\underline{\Omega}\vec{R}_{PA} + \dot{\vec{R}}_{PA}\right) \mid \underline{\Omega}\vec{r}_{PA} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{PA} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \underline{B}\left(\vec{\Omega} \times \vec{R}_{PA} + \dot{\vec{R}}_{PA}\right)}$
$\vec{v}_P$ in Raum-koordinaten:	$\vec{v}_P = -" - \mid \dot{\underline{B}} = \underline{\omega}\underline{B} \Rightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A + \underline{\omega}\underline{B}\vec{R}_{PA} + \underline{B}\dot{\vec{R}}_{PA} \mid \underline{B}\vec{R}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA};\ \underline{B}\dot{\vec{R}}_{PA} = \vec{v}_{rel} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PA} + \vec{v}_{rel}}$
$\vec{a}_P$ in Raum-koordinaten:	$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_A + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{PA}}_{Eulerbeschl.} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{PA})}_{Zentripetalbeschl.}}_{Führungsbeschleunigung} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}}_{Coriolisbeschl.} + \underbrace{\vec{a}_{rel}}_{Relativbeschl.}$

Flaschenzüge

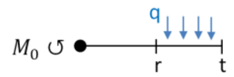
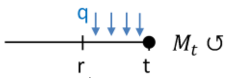
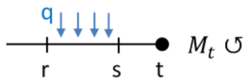
- Sei A ein Punkt am Rollenrand, und M der Mittelpunkt. Es gilt: $\vec{v}_A = \vec{v}_M + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AM}$; $\vec{a}_A = \vec{a}_M + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AM} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AM})$
- Eine Rolle hat an der Stelle, an der sie das Seil berührt, genau die Geschwindigkeit des Seiles, und umgekehrt.
- Ist das Seil unmittelbar vor oder nach der Rolle unbeweglich fixiert, haben Seil und Rolle am Berührungspunkt die Geschwindigkeit Null.
- Wird ein Seil über eine <u>fest montierte (unbewegliche)</u> Rolle geführt, hat es danach <u>dieselbe</u> Geschwindigkeit.
- Wird ein Seil über eine <u>bewegliche</u> Rolle geführt, hat es danach im Allgemeinen <u>nicht</u> dieselbe Geschwindigkeit.
- Bei fest miteinander verbundene Rollen haben die Mittelpunkte die gleiche Geschwindigkeit.
- Sei M der Mittelpunkt einer Rolle, und A und C zwei gegenüberliegende Punkte am Rollenrand, deren Verbindungslinie durch den Mittelpunkt geht. Dann gilt <u>immer</u> (unter Berücksichtigung der Vorzeichen): $v_m = \frac{1}{2}(v_a + v_c)$

Balken, Lagerkräfte und Schnittkräfte

Auflagerkräfte:

- Hauptkoordinatensystem x/z, bei welchem x nach rechts und z nach unten zeigt.
- Auflagerkräfte zerlegt in Komponenten H_i und V_i einzeichnen. Bei Gleitlager: Nur eine Komponente!
- Nur bei dreiwertigem Lager (eingespanntes Ende, „Balken, der in Wand steckt") gibt es auch ein Lagerdrehmoment M_i.
- Alle Drehmomente (natürlich auch die Lagerdrehmomente) sind immer in linksdrehender Richtung positiv.
- Gelenke übertragen kein Drehmoment.
- Ansatz für Kräfte und Drehmomente: $\sum H_i = 0$; $\sum V_i = 0$; $\sum M_i = 0$. Gleitlasten müssen entsprechend aufintegriert werden.
- Die Vorzeichen ergeben sich aus den (frei) gewählten Richtungen der Vektoren in Bezug auf das Koordinatensystem.
- Drehmoment: Man wähle als Bezugspunkt praktischerweise das Lager oder den Punkt, in dem die meisten Kräfte angreifen. Achtung: Ein allfälliges Lagerdrehmoment dieses Lagers muss trotzdem mitgerechnet werden!
- Drehmoment eines einzelnen Kraftvektors: allg. $M = |\vec{r} \times \vec{F}|$; hier einfach: M = Kraft mal Normalabstand.

Drehmomente von Gleitlasten q(x) entlang des Hebelarms

Bereich *r* bis *t*, Moment bei 0	**Bereich *r* bis *t*, Moment bei t**	**Bereich *r* bis *s*, Moment bei t**	**Wenn t=x (Linkes Schnittufer):**
 $M_0 = -\int_r^t \xi\, q(\xi)\, d\xi$	 $M_t = +\int_r^t (t-\xi)\, q(\xi)\, d\xi$	 $M_t = +\int_r^s (t-\xi)\, q(\xi)\, d\xi$	In allen Integralen t durch x ersetzen (Achtung: Ersetzen bei Integrationsgrenze und Integrand)

Schnittkräfte:

- Für waagrechte Balken ein Koordinatensystem x_1/z_1, bei welchem x_1 nach rechts und z_1 nach unten zeigt.
- Für senkrechte Balken ein Koordinatensystem x_2/z_2, bei welchem x_2 entlang des Balkens zeigt, und z_2 in Querrichtung. Das Koordinatensystem x_2/z_2 muss sich durch Drehung aus dem Koordinatensystem x_1/z_1 erzeugen lassen!
- Schnitt durch jeden Balken entlang der jeweiligen z-Richtung.
- Positives Schnittufer: Querkraft Q in positiver z-Richtung, Normalkraft N in positiver x-Richtung, Drehmomente linksdrehend.
- Negatives Schnittufer: Querkraft Q in negativer z-Richtung, Normalkraft N in negativer x-Richtung, Drehmomente rechtsdrehend. Die resultierenden Zahlenwerte müssen dann „auf beiden Seiten" letztlich gleich sein und auch <u>automatisch</u> dieselben Vorzeichen ergeben!

Variante 1:

- $\sum H_i = 0$; $\sum V_i = 0$; $\sum M_i = 0$ (inkl. allfälligem Lagerdrehmoment; Wahl des Bezugspunktes frei).
- Die Vorzeichen ergeben sich aus den (frei) gewählten Richtungen der Vektoren in Bezug auf das Koordinatensystem.
- Es werden nur „nicht weggeschnittene" Kräfte und Momente berücksichtigt.
- Gleitlasten müssen entsprechend von a bis x aufintegriert werden.

Variante 2 (alternativ, bei Gleitlasten $q_z(x)$ in Querrichtung oder $q_x(x)$ in Längsrichtung):

- $\vec{Q}'(x) = -\sum \vec{q}_z(x) \;|\int \Rightarrow \vec{Q}(x) = -\sum \int \vec{q}_z(x)\, dx + \vec{Q}_0$; Vorzeichen: vektorielle Addition mit Koordinatensystem als Referenz!
- $\vec{N}'(x) = -\sum \vec{q}_x(x) \;|\int \Rightarrow \vec{N}(x) = -\sum \int \vec{q}_x(x)\, dx + \vec{N}_0$; Vorzeichen: vektorielle Addition mit Koordinatensystem als Referenz!
- $\vec{Q}_0$ und $\vec{N}_0$ bestimmen über RB, am besten mit bekannter Lagerkraft. Zum Beispiel: Einzelner waagrechter Balken, senkrechter Schnitt; links sei Lager A $\Rightarrow \vec{Q}(0) + \vec{V}_A = 0$.
- **Achtung!** Nur $q_z(x)$ und $q_x(x)$ berücksichtigen, die im betrachteten Balkenbereich liegen!
- **Achtung!** RB nicht „außerhalb" des betrachteten Balkenbereichs. Wenn z.B. Bereich a<x<2a; dann ist RB $\vec{Q}(0) + \vec{V}_A = 0$ falsch.
- Drehmoment: $M'(x) = Q \;|\int \Rightarrow M(x) = \int Q\, dx + M_0 \Rightarrow M_0$ bestimmen über RB, am besten mit bekanntem Lagermoment.

Biegelinien

Biegelinie, Balken j:	$w_j''(x) = -\frac{1}{EJ} M_j(x)$	EJ ... *Biegesteifigkeit* $M_j(x)$ ... *Schnittmoment*	$w_j(x) = \iint w_j''(x)\, dx$	Integrationskonstanten c1 und c2 nicht vergessen; bestimmen mit Rand- und Übergangsbedingungen
Axialverschiebung:	$u_j'(x) = \frac{1}{EA} N_j(x)$	E ... *Elastizitätsmodul* $N_j(x)$ ... *Normalkraft*	$u_j(x) = \int u_j'(x)\, dx$	Integrationskonstante c nicht vergessen; bestimmen mit Rand- und Übergangsbedingungen
Randbedingungen:	• Jedes Lager oder Stütze; inkl. federnde Einspannung mit Spiralfeder bei Punkt a: $w(a) = 0$; $u(a) = 0$ • Dreiwertiges Lager (Eingespanntes Ende, „Balken, der in Wand steckt"): $w'(a) = 0$			
Übergangsbedingungen:	• Stütze zwischen Bereich i und j bei Punkt a: $w_j(a) = w_i(a)$; $w_j'(a) = w_i'(a)$ • L-förmiger Übergang bei a: $w_j([a]_j) = \pm u_i([a]_i)^*$; $u_j([a]_j) = \pm w_i([a]_i)^*$; Vorz. passend je n. Ausrichtung des Systems • L-förmiger Übergang bei a: $w_j'([a]_j) = w_i'([a]_i)^*$			

* $[a]_j$ ist der Punkt a im Koordinatensystem des Balkens j; $[a]_i$ im Koordinatensystem des Balkens i

Erstellung der Lagrange-Bewegungsgleichungen für holonome Systeme

Holonomes System: Nicht nur die Freiheitsgrade q_i sind (per Definition) voneinander unabhängig, sondern auch deren Variationen δq_i

<u>Freiheitsgrade:</u>

- Freiheitsgrade q_i festlegen. Jeder FG muss per Definition von jedem anderen unabhängig sein.

<u>Kinetische Energie T:</u>

- Für jedes massenbehaftete Teilobjekt j die kinetische Energie $T_j = T_j^{trans} + T_j^{rot}$ bestimmen. ($T_j^{trans} = \frac{1}{2} m v_s^2$; $T_j^{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$).
- Für jedes Objekt muss v_s^2 bzw. ω^2 als Funktion der FG ausgedrückt werden (z.B. zur Bestimmung von v_s^2: Ortsvektor zum Objekt-Schwerpunkt $\vec{r}_s = \vec{r}_s(q_1, \dots, q_i)$ aufstellen, nach t ableiten, quadrieren)
- Empfehlenswert: Bei T_j^{rot} nur die „eigene" Rotation berücksichtigen, nicht die indirekte Rotation über ein verbundenes Objekt.
- $T_{ges} = \sum T_j$

<u>Potentielle Energie V:</u>

- Für jedes massenbehaftete Teilobjekt j die potentielle Gravitationsenergie $W_j = m_j g h$ mit $h = \mathrm{h}(q_1, \dots, q_i)$ bestimmen.
- Alle Terme in W_j, die unabhängig von den FG sind, können in einer Konstanten W_0 zusammengefasst werden und sind irrelevant.
- Für jedes Objekt, das mit Federn verbunden ist, die Verzerrungsenergien $U_j = -\int_0^s F_{Feder}\, ds = -\int_0^s (-cs)\, ds = \frac{1}{2} c s^2$ bestimmen, wobei s die Auslenkung ist (linear oder Winkelauslenkung), und über die FG ausgedrückt wird: $s = \mathrm{s}(q_1, \dots, q_i)$
- $V_{ges} = \sum W_j + \sum U_j$

<u>Verallgemeinerte Kräfte Q_i (ohne Potential):</u>

- Berücksichtigt Dämpfungskräfte F_D und externe Kräfte $\mathrm{F}(t)$
- Ansatz: $\delta A = \sum F_D \delta s + \sum \vec{\mathrm{F}}(t) \cdot \delta \vec{r}$
  - F_D ist die jeweilige Dämpfungskraft $F_D = -k\dot{s}$, wobei s die Auslenkung ist (linear oder Winkelauslenkung), und über die FG ausgedrückt wird: $s = \mathrm{s}(q_1, \dots, q_i)$
  - δs ist das „totale Differential über alle Freiheitsgrade, aber ohne Zeit":
    $\delta s = \frac{\partial s}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial s}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial s}{\partial q_i} \delta q_i$. Ist $s = q_k$, dann ist demzufolge $\delta s = \delta q_k$.
  - $\vec{r}$ ist der Ortsvektor des Punktes, an dem eine externe Kraft angreift, und muss über die FG ausgedrückt werden: $\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_i)$
  - $\delta \vec{r}$ ist wiederum das „totale Differential von $\vec{r}$ ohne Zeit" (komponentenweise).
- Ergebnis zusammenfassen nach $\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_i \delta q_i$
- $Q_1, Q_2, \dots, Q_i$ sind die verallgemeinerten Kräfte.

<u>Bewegungsgleichungen:</u>

- Je eine BWGL pro Freiheitsgrad q_i: $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$

<u>Gleichgewichtsbedingungen:</u>

- In den BWGL alle $\dot{q}_i$ und alle $\ddot{q}_i$ gleich 0 setzen.

Federpotential (Verzerrungsenergie):	$U_{feder} = \frac{1}{2} c s^2;\ U_{spiralfeder} = \frac{1}{2} \gamma \varphi^2$	Dämpfungs arbeit:	$\delta A = -k\dot{s}\delta s \text{ bzw. } \delta A = -\kappa \dot{\varphi} \delta \varphi$

Trägheitsmoment

$I = \int_K r^2\, dm = \rho \int_K r^2\, dV = \frac{m}{V_K} \int_K r^2\, dV;\ [kg\, m^2]$				$dV = dx\, dy\, dz = r^2 \sin\vartheta \cdot dr\, d\varphi\, d\vartheta = r \cdot dr\, d\varphi\, dz$					
Massepunkt, Ring, Zylindermantel:	$I = mr^2$	Ring (Ø-Achse), Kreisscheibe, Vollzylinder:	$I = \frac{m}{2} r^2$	Hohl-zylinder:	$I = \frac{m}{2} ({r_2}^2 - {r_1}^2)$	Stab (Achse durch MP)	$I = \frac{m}{12} l^2$	Stab, Achse durch Ende:	$I = \frac{m}{3} l^2$
Kugelschale	$I = \frac{2}{3} mr^2$	Kreisscheibe (Ø-Achse)	$I = \frac{m}{4} r^2$	Quader (z-Achse):	$I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$	Vollzylinder, Achse ⊥ Körperachse durch MM	$I = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$		
Kugel:	$I = \frac{2}{5} mr^2$			Steiner:	$I' = I + mr^2 = \int_k \left(\frac{I}{dm} + k^2\right) dm = \frac{M}{k_e - k_a} \int_{k_a}^{k_e} \left(\frac{I}{dm} + k^2\right) dk$				

Verzerrungstensoren

Lagrange-Sichtweise:

Die zum Referenzzeitpunkt t=0 („unverformten“) karthesische Körperkoordinaten $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ („Lagrange-Koordinaten“) eines Körperpunktes werden übergeführt in die Raumkoordinaten des Punktes nach Verformung $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, wobei $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$.

$\vec{x}(\vec{\xi},t) = \vec{\xi} + \vec{u}(\vec{\xi},t)$; u ...Verschiebungsvektor $\left|\frac{d}{d\xi} d\xi \Rightarrow\right.$

$$\boxed{\underline{\underline{F}} = \mathbb{1} + \underline{\underline{U_L}}} \quad \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}$$

$$umgekehrt: \quad \vec{u}(\vec{\xi},t) = \vec{x} - \vec{\xi}; \quad \boxed{\underline{\underline{U_L}} = \underline{\underline{F}} - \mathbb{1}} \quad \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} - \delta_{ij}$$

Lagrange‘r Deformations-gradient:

$$\underline{\underline{F_L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}$$

Lagrange‘r Verschie-bungsgra-dient:

$$\underline{\underline{U_L}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}$$

Greenscher Verzerrungstensor: $\underline{\underline{G}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{F_L}}^T \underline{\underline{F_L}} - \mathbb{1}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{U_L}} + \underline{\underline{U_L}}^T + \underline{\underline{U_L}}^T \underline{\underline{U_L}}\right); \; \left(\underline{\underline{G}}\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^L}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j^L}{\partial \xi_i} + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k^L}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k^L}{\partial \xi_j}\right)$

Euler-Sichtweise:

Aus den zu einem Zeitpunkt t („verformten“) karthesische Raumkoordinaten $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ („Euler’sche Koordinaten“) eines Köperpunktes werden die „unverformten“ Körperkoordinaten $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ zum Referenzzeitpunkt t=0 zurückberechnet.

$\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{u}(\vec{x},t)$; u ...Verschiebungsvektor $\left|\frac{d}{dx} dx \Rightarrow\right.$

$$\boxed{\underline{\underline{F_E}} = \mathbb{1} - \underline{\underline{U_E}}} \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$umgekehrt: \quad \vec{u}(\vec{x},t) = \vec{x} - \vec{\xi}; \quad \boxed{\underline{\underline{U_E}} = \mathbb{1} - \underline{\underline{F_E}}} \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}$$

Eulerscher Deformations-gradient:

$$\underline{\underline{F_E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

Eulerscher Verschie-bungsgra-dient:

$$\underline{\underline{U_E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}$$

Almansischer Verzerrungstensor: $\underline{\underline{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{U_E}} + \underline{\underline{U_E}}^T - \underline{\underline{U_E}}^T \underline{\underline{U_E}}\right); \; \left(\underline{\underline{A}}\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^E}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^E}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k^E}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^E}{\partial x_j}\right)$