Helmuts Kochrezept Nummer 1:

Wie berechne ich das Integral eines Vektorfeldes über eine gegebene Fläche im Raum (den Fluss durch die Fläche)?

(Version 4, 24.05.2018)

Dieses „Kochrezept“ erklärt Dir, wie du das Integral eines Vektorfeldes über eine gegebene Fläche im Raum (also den Fluss durch die Fläche) berechnest.

1 Zu lösende Aufgabe

Gegeben sei ein Vektorfeld in kartesischen Koordinaten $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$, und eine Fläche S im Raum. Gesucht ist das Integral

$$I = \int_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} \tag{1}$$

2 Erster Schritt: Parametrisierung der Fläche

2.1 Allgemein

Wenn die Fläche S nicht schon explizit als vektorielle Funktion mit zwei Parametern gegeben ist, muss sie „parametrisiert“ werden. Das heißt, wir müssen eine vektorielle Funktion $\vec{s}(u, v)$ finden, mit der man alle Punkte der Fläche erreichen kann, indem man den Parametern u und v verschiedene Werte zuweist. Außerdem müssen wir überlegen, in welchen Grenzen $u_{min} \dots u_{max}$ bzw. $v_{min} \dots v_{max}$ die Parameter u und v variiert werden müssen, damit man die ganze Fläche abdeckt, aber nicht darüber „hinausschießt“.

2.2 Konkretes Beispiel

Eine beliebige Fläche, gegeben als $z = \mathrm{z}(x, y)\,, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,$ lässt sich unmittelbar über die Parameter x und y parametrisieren:

$$\vec{s}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathrm{z}(x, y) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix} \tag{2}$$

Konkretes Beispiel: Der Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1$ ließe sich ebenso über die Parameter x und y parametrisieren:

$$\vec{s}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

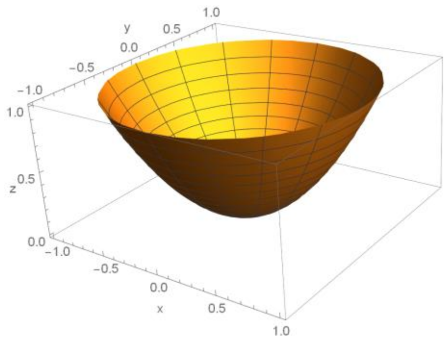

Abbildung 1: Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$; $0 \le z \le 1$.

Die Integrationsgrenzen x_{min} und x_{max} bzw. y_{min} und y_{max} sind jedoch nicht so trivial wie im vorigen Beispiel. Besser wäre die Parametrisierung über die Polarkoordinaten r und φ, denn offensichtlich muss das Integral bei jedem Wert von z einen Kreis „abtasten", dessen Radius r umso größer wird, je größer z wird. Es gilt: $x = r\cos(\varphi)$, und $y = r\sin(\varphi)$. Setzt man das in (3) ein, erhält man

$$\vec{\mathrm{s}}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Daraus kann man auch die Grenzen der neuen Parameter r und φ ablesen. Natürlich ist $0 \le \varphi \le 2\pi$. Der kleinste Wert für r ist offenbar 0 (das ist der tiefste Punkt der „Schüssel" bei der z-Koordinate $z = 0^2 = 0$), und der größte Wert für r ist 1, was der z-Koordinate $z = 1^2 = 1$ entspricht (z soll laut Angabe ja nicht größer als 1 werden). Daher ist in diesem Beispiel $0 \le r \le 1$.

Bitte beachte, dass wir zwar die Polarkoordinaten r und φ zur Parametrisierung eingesetzt haben, der Vektor $\vec{\mathrm{s}}(r,\varphi)$ ist aber immer noch ein Vektor in kartesischen Koordinaten!

Wir kennen nun also die Integrationsgrenzen für die Parametrisierung $\vec{\mathrm{s}}(r,\varphi)$.

$$\begin{gathered} 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{gathered} \tag{5}$$

3 Zweiter Schritt: Normalvektor auf die Fläche

3.1 Allgemein

Wir bilden nun ein Vektorfeld $\vec{\mathrm{n}}(u,v)$, das an jeder Stelle der Fläche S den (nicht normierten) Normalvektor darstellt. Dies geht am einfachsten so:

$$\vec{\mathrm{n}}(u,v) = \frac{\partial\vec{\mathrm{s}}}{\partial \mathrm{u}} \times \frac{\partial\vec{\mathrm{s}}}{\partial \mathrm{v}} \tag{6}$$

Achtung: Zu jeder Fläche gibt es zwei Normalvektorfelder, deren Vektoren genau um 180° entgegengesetzt stehen; z.B. bei einer geschlossenen Fläche die Vektoren, die „nach außen" zeigen, und die Vektoren, die „nach innen" zeigen. Die Richtung der Normalvektoren gibt an, in welcher Richtung wir den Fluss ausrechnen; das Vorzeichen des Ergebnisses dreht sich also um, wenn wir das „falsche" Vektorfeld $\vec{\mathrm{n}}(u,v)$ verwenden. Das Vektorfeld in die umgekehrte Richtung berechnet man so:

$$\vec{\mathrm{n}}_{umgekehrt}(u,v) = \frac{\partial\vec{\mathrm{s}}}{\partial \mathrm{v}} \times \frac{\partial\vec{\mathrm{s}}}{\partial \mathrm{u}} \tag{7}$$

Orientierung des Normalvektors:

- **Geschlossene Fläche (wichtig beim Satz von Gauß):** Die Flächenseite, von der der Normalvektor weg zeigt, ist als „positiv" oder „Außenseite" definiert. Bei geschlossenen Flächen (z.B. Kugelfläche) wählt man im Allgemeinen dasjenige $\vec{\mathrm{n}}(u,v)$, bei dem die Vektoren nach außen zeigen (auf jeden Fall beim Satz von Gauß!). Damit berechnet das Integral den Gesamtfluss von „innen nach außen".
- **Fläche mit Rand (wichtig beim Satz von Stokes):** Der Satz von Stokes bringt das Integral eines Vektorfeldes über den *Rand* ∂S *der Fläche* mit dem Integral über die *Fläche* S in Zusammenhang. Damit das richtig funktioniert, muss folgende Regel beachtet werden: Wenn man über den *Rand* ∂S integriert, gibt es eine bestimmte Durchlaufrichtung (Standardmäßig gegen den Uhrzeigersinn). Wenn man sich vorstellt, ein kleines Männchen wandert diesen Rand in Integrationsrichtung entlang, dann liegt die Außenseite der Fläche stets links vom Männchen. Für Details hierzu siehe „Helmuts Kochrezept Nr. 3", http://www.goldsilberglitzer.at/Rezepte/Rezept003.pdf)

3.2 Konkretes Beispiel (Fortsetzung)

Gegeben sei die in (4) parametrisierte Fläche $\vec{\mathrm{s}}(r,\varphi)$. Wenn wir den Fluss „von außen nach innen“ berechnen wollen, berechnet sich der Normalvektor $\vec{\mathrm{n}}(r,\varphi)$ als

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{n}}(r,\varphi) = \frac{\partial \vec{\mathrm{s}}}{\partial \mathrm{r}} \times \frac{\partial \vec{\mathrm{s}}}{\partial \varphi} \overset{(4)}{=} \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ -2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

Die so berechneten Normalvektoren zeigen „in die Schüssel hinein“ (siehe Abbildung 2).

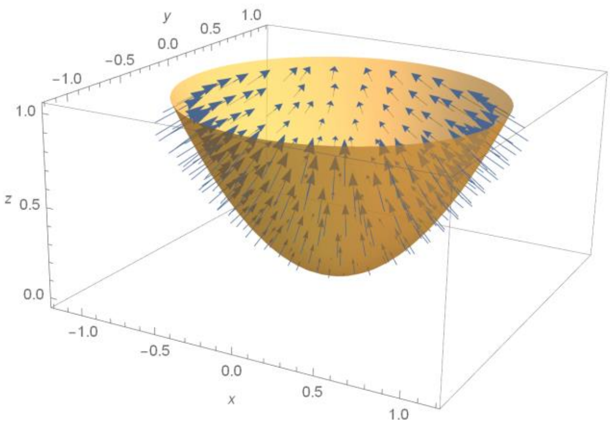

Abbildung 2: Normalvektoren „von außen nach innen“ auf die Fläche $\vec{\mathrm{s}}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix}$.

4 Dritter Schritt: Vektorfeld entlang der Oberfläche

4.1 Allgemein

Wir wollen ja wissen, was das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ entlang der Oberfläche S tut. Die Oberfläche haben wir bereits mit der vektoriellen Funktion $\vec{\mathrm{s}}(u,v)$ dargestellt. Daher müssen wir im nächsten Schritt $\vec{v}(\vec{\mathrm{s}}(u,v))$ ausdrücken.

Dieser Schritt bedeutet einfach folgendes: Im Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x,y,z)$ ersetzt man x, y und z mit genau den Ausdrücken, die die Funktion

$$\vec{\mathrm{s}}(u,v) = \begin{pmatrix} \mathrm{s}_x(u,v) \\ \mathrm{s}_x(u,v) \\ \mathrm{s}_x(u,v) \end{pmatrix} \tag{9}$$

liefert, also $\vec{v}(\vec{\mathrm{s}}(u,v)) = \vec{v}\big(\mathrm{s}_x(u,v)\,, \mathrm{s}_y(u,v)\,, \mathrm{s}_z(u,v)\big)$.

4.2 Konkretes Beispiel (Fortsetzung)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2z \\ -y \\ z \end{pmatrix} \tag{10}$$

Setzen wir die s_x, s_y und s_z-Werte der Parametrisierung (4) ein, erhalten wir:

$$\vec{v}(\vec{s}(r,\varphi)) = \vec{v}(x = r\cos(\varphi)\,, y = r\sin(\varphi), z = r^2) = \begin{pmatrix} 2r^2 \\ -r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

5 Vierter Schritt: Integral fertigstellen

5.1 Allgemein

Das Integral lässt sich nun so darstellen:

$$I = \int_S \vec{v}(\vec{s}(u,v)) \cdot d\vec{A} \quad \left| d\vec{A} = \vec{n}(u,v)\, du\, dv \right. \tag{12}$$

$$I = \int_{v_{min}}^{v_{max}} \int_{u_{min}}^{u_{max}} \vec{v}(\vec{s}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v)\, du\, dv \tag{13}$$

5.2 Konkretes Beispiel (Fertigstellung)

Nehmen wir die Rechenergebnisse (11) und (8), sowie die Integrationsgrenzen (5), dann erhalten wir:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \begin{pmatrix} 2r^2 \\ -r\sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2r^2\cos(\varphi) \\ -2r^2\sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} dr\, d\varphi \tag{14}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-4r^4\cos(\varphi) + 2r^3\sin^2(\varphi) + r^3)\, dr\, d\varphi \tag{15}$$

$$I = \int_0^1 4\pi r^3\, dr \tag{16}$$

$$\boxed{I = \pi} \tag{17}$$

Anmerkung:

Obwohl wir in obigem Beispiel über $dr\,d\varphi$ integriert haben, ist es bei diesem Rechenweg nicht nötig, die Funktionaldeterminante für Polarkoordinaten r dem Integral von Hand hinzuzufügen, und $r\,dr\,d\varphi$ zu schreiben. Dies liegt daran, dass die Funktionaldeterminante bereits im Betrag des nicht normierten Normalvektors (8) beinhaltet ist. Dies gilt auch für alle anderen Parametrisierungen.