Helmuts Kochrezept Nummer 2:

Wie berechne ich das Integral eines Vektorfeldes über eine gegebene Kurve im Raum?

(Version 3, 14.03.2019)

Dieses „Kochrezept" erklärt Dir, wie du das Integral eines Vektorfeldes über eine gegebene Kurve im Raum berechnest.

1 Zu lösende Aufgabe

Gegeben sei ein Vektorfeld in kartesischen Koordinaten $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$, und eine Kurve C im Raum. Gesucht ist das Kurvenintegral des Vektorfeldes $\vec{v}$ entlang der Kurve C:

$$I = \int_C \vec{v}(\vec{r})\, dr \tag{1}$$

2 Erster Schritt: Parametrisierung der Kurve

2.1 Allgemein

Wenn die Kurve C nicht schon explizit als vektorielle Funktion mit einem Parameter gegeben ist, muss sie „parametrisiert" werden. Das heißt, wir müssen eine vektorielle Funktion $\vec{s}(u)$ finden, mit der man alle Punkte der Kurve erreichen kann, indem man dem Parameter u verschiedene Werte zuweist. Außerdem müssen wir überlegen, in welchen Grenzen u_{min} und u_{max} der Parameter u variiert werden muss, damit man die ganze Kurve abdeckt, aber nicht darüber „hinausschießt".

2.2 Konkretes Beispiel

Die Kurve, entlang der integriert werden soll, sei die Schnittkurve zwischen dem Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2, 0 \leq z$, und der Fläche $z = 1$.

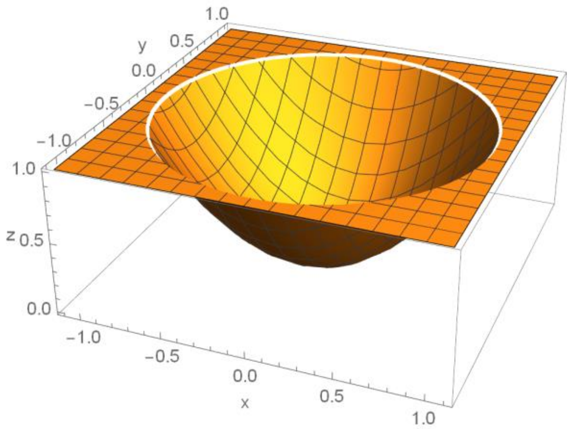

Abbildung 1: Schnittkurve zwischen dem Rotationsparaboloid $z = x^2 + y^2$; $0 \leq z$ und der Fläche z=1.

Setzt man $z = 1$ in die Gleichung $z = x^2 + y^2$ ein, erhält man $1 = x^2 + y^2$. Dies ist die Gleichung eines Einheitskreises. Die gesuchte Kurve ist also ein Einheitskreis in der Ebene $z = 1$

© Helmut Hörner, 2018-2019

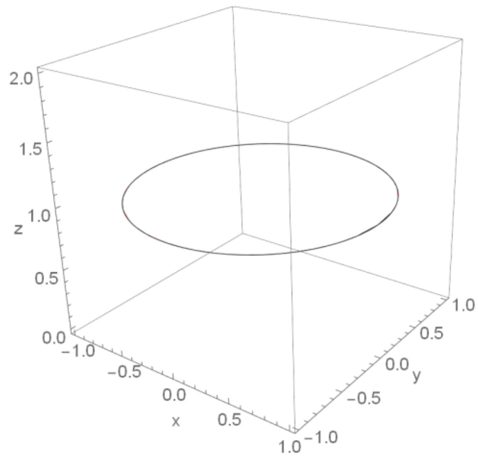

Abbildung 2: Die gesuchte Kurve ist ein Einheitskreis in der Ebene z=1.

Es bietet sich offensichtlich die Parametrisierung über den Winkel φ an:

$$\vec{s}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Natürlich ist somit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Damit kennen wir nun also die Integrationsgrenzen für die Parametrisierung $\vec{s}(\varphi)$.

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \tag{3}$$

3 Zweiter Schritt: Ableitung der Kurvenparametrisierung

3.1 Allgemein

Wir berechnen nun die Ableitung $\vec{s}'(u)$ der Kurvenparametrisierung $\vec{s}$:

$$\vec{s}'(u) = \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \tag{4}$$

3.2 Konkretes Beispiel (Fortsetzung)

Gegeben sei die in (2) parametrisierte Fläche $\vec{s}(\varphi)$. Die Ableitung $\vec{s}'(\varphi)$ ist

$$\vec{s}'(\varphi) = \frac{\partial \vec{s}}{\partial \varphi} \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

4 Dritter Schritt: Bestimmung der Integrationsrichtung

4.1 Allgemein

Die Integrationsrichtung hängt im Einzelnen vom hinter der Rechnung stehenden physikalischen Problem ab. Ohne weitere Angabe ist die Standard-Integrationsrichtung die mathematisch positive Drehrichtung, d.h. wir integrieren gegen den Uhrzeigersinn.

Anmerkung: Manchmal berechnet man ein Kurvenintegral über den *Rand einer Fläche S* ($C = \partial S$), weil man den **Satz von Stokes** zur Anwendung bringen will (Der Satz von Stokes bringt das Integral eines Vektorfeldes über den *Rand* ∂S *der Fläche* mit dem Integral über die *Fläche S* in Zusammenhang). Damit das richtig funktioniert, muss folgende Regel beachtet werden: Wenn man sich vorstellt, ein kleines Männchen wandert diesen Rand in die gewählte Integrationsrichtung entlang, dann liegt die „Außenseite" der Fläche stets links vom Männchen. Die „Außenseite" der Fläche ist dabei die Seite, von der der Normalvektor immer weg zeigt. Für Details hierzu siehe „Helmuts Kochrezept Nr. 3", http://www.goldsilberglitzer.at/Rezepte/Rezept002.pdf)

4.2 Konkretes Beispiel (Fortsetzung)

Wir integrieren in mathematisch positive Drehrichtung, also von $\varphi_{min} = 0$ bis $\varphi_{max} = 2\pi$.

5 Dritter Schritt: Vektorfeld entlang der Kurve

5.1 Allgemein

Wir wollen ja wissen, was das Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ entlang der Kurve C tut. Die Kurve haben wir bereits mit der vektoriellen Funktion $\vec{s}(u)$ dargestellt. Daher müssen wir im nächsten Schritt $\vec{v}(\vec{s}(u))$ ausdrücken.

Dieser Schritt bedeutet einfach folgendes: Im Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$ ersetzt man x, y und z mit genau den Ausdrücken, die die Funktion

$$\vec{s}(u) = \begin{pmatrix} s_x(u) \\ s_x(u) \\ s_x(u) \end{pmatrix} \tag{6}$$

liefert, also $\vec{v}(\vec{s}(u)) = \vec{v}\big(s_x(u), s_y(u), s_z(u)\big)$.

5.2 Konkretes Beispiel (Fortsetzung)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -yz \\ -z^2 \\ -3z \end{pmatrix} \tag{7}$$

Setzen wir die s_x-, s_y- und s_z-Werte der Parametrisierung (2) ein ($x = \cos(\varphi), y = \sin(\varphi), z = 1$), erhalten wir:

$$\vec{v}(\vec{s}(\varphi)) \overset{(7)}{=} \begin{pmatrix} -\mathrm{y}(\varphi)\,\mathrm{z}(\varphi) \\ -\mathrm{z}(\varphi)^2 \\ -3\,\mathrm{z}(\varphi) \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cdot 1 \\ -1^2 \\ -3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

6 Vierter Schritt: Integral fertigstellen

6.1 Allgemein

Das Integral lässt sich nun so darstellen:

$$I = \int_{u_{min}}^{u_{max}} \vec{v}(\vec{s}(u))\, \vec{s}\,'(u)\, du \tag{9}$$

6.2 Konkretes Beispiel (Fertigstellung)

Nehmen wir die Rechenergebnisse (8) und (5), sowie die Integrationsgrenzen (3), dann erhalten wir:

$$I = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \tag{10}$$

$$I = \int_0^{2\pi} (\sin^2(\varphi) - \cos(\varphi))\, d\varphi \tag{11}$$

$$\boxed{I = \pi} \tag{12}$$