Helmuts Kochrezept Nummer 4:

Vektorrechnung in Indexnotation (Einstein'sche Summenkonvention)

(Version 10, 8.3.2025)

Dieses „Kochrezept" erklärt Dir, wie du Vektorrechnungen in die Indexnotation gemäß Einstein'scher Summenkonvention umwandelst, in dieser Indexnotation rechnest, und das Endergebnis wieder in Vektorschreibweise zurückverwandelst. Dabei wird hier von einer euklidischen Metrik ausgegangen (z.B. Rechnungen im $\mathbb{R}^3$) und daher nicht zwischen ko- und kontravarianten Indizes unterschieden.

1 Allgemeines

1.1 Grundlegendes

In herkömmlicher Vektorschreibweise schreibt man einen Vektor mit n Komponenten folgendermaßen an:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

In Indexnotation schreibt man stattdessen einfach nur v_i, wobei der Index i für die i-te Komponente des Vektors $\vec{v}$ steht:

$$(\vec{v})_i = v_i \tag{2}$$

Wenn man v_i schreibt, steht das also einerseits für eine einzelne, ausgewählte Komponente des Vektors (nämlich die i-te). Somit repräsentiert v_i zunächst einmal einen skalaren Wert (eine Zahl). Andererseits kann man für i aber jederzeit einen beliebigen Wert zwischen 1 und n einsetzen, und somit repräsentiert v_i zugleich auch den gesamten Vektor $\vec{v}$ (statt i kann natürlich auch ein anderer Buchstabe als Index verwendet werden). **Ein Term mit <u>einem einzelnen</u> Index (der sogenannte „freie Index") repräsentiert also in Indexschreibweise einen Vektor.**

1.2 Summenkonvention

Wenn in einem <u>Produktterm</u> derselbe Index <u>genau zweimal</u> vorkommt („abgesättigt ist"), wird darüber summiert („Einstein'sche Summenkonvention"). Zum Beispiel:

$$a_i v_i \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \tag{3}$$

Das obige Beispiel entspricht dem inneren Produkt zweier Vektoren.

$$(\vec{a} \cdot \vec{v})_i = a_i v_i \tag{4}$$

Zwei Variablen mit <u>demselben Index im selben Produktterm</u> („abgesättigter Index") repräsentieren also ein inneres Vektorprodukt und somit einen Skalar.

Regeln:

- In einem Produktterm darf derselbe Index niemals mehr als zweimal auftauchen
- Auch ein Bruch ist ein Produktterm!
- Schreibe als Anfänger vielleicht nicht a_i^2, sondern $a_i a_i$, damit du erkennst, dass über i summiert wird.
- $\sqrt{a_i a_i}$ bedeutet $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i a_i}$, nicht $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i a_i}$
- Große Erleichterung: Weil zum Beispiel a_i, b_i und c_j jeweils nur die die i-te bzw. j-te Komponente der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ repräsentieren (also somit Skalare sind), spielt die Reihenfolge in einem Produktterm überhaupt keine Rolle: $a_i b_i c_j = c_j a_i b_i = b_i c_j a_i = b_i a_i c_j = c_j b_i a_i$

1.3 Freier Index und abgesättigte Indizes

Gibt es in einem Produktterm ausschließlich doppelte („abgesättigte") Indizes, dann repräsentiert dieser Term einen skalaren Ausdruck. Beispiel: $a_i b_i c_j d_j$. Es müssen dann aber in allen Produkttermen die in einer Gleichung additiv oder subtraktiv verknüpft sind, ausschließlich abgesättigte Indizes auftauchen (eine Addition oder Subtraktion von Vektor und Skalar ist ja nicht möglich).

Umgekehrt: Gibt es in einem Produktterm einen „freien" Index (also einen Index, der nur einmal vorkommt), dann repräsentiert dieser Produktterm einen Vektor. Die linke und die rechte Seite der Gleichung, sowie alle vorkommenden Terme müssen denselben freien Index haben.

Richtig:

$$c_j = a_i u_i v_j + b_k v_k v_j \text{ (Vektor)} \tag{5}$$

$$\alpha = a_i u_i + b_j v_j \text{ (Skalar)} \tag{6}$$

Falsch:

$$c_j = a_i u_i v_j + b_i v_i v_k \tag{7}$$

$$c_j = a_i u_i + b_i v_i v_j \tag{8}$$

$$\alpha = a_i b_i c_i + b_i v_i v_j \tag{9}$$

- Fehler bei (7): Der freie Index k rechts passt nicht zum freien Index j auf der linken Seite der Gleichung.
- Fehler bei (8): Auf der linken Seite der Gleichung steht ein Vektor (freier Index j), aber der Term $a_i u_i$ ist ein Skalar.
- Fehler bei (9): Der Term $a_i b_i c_i$ hat dreimal denselben Index, und außerdem steht auf der linken Seite der Gleichung ein Skalar, und der rechte Ausdruck $b_i v_i v_j$ mit freiem Index j repräsentiert einen Vektor.

Beachte außerdem, dass die Bezeichnung der abgesättigten Indizes beliebig gewählt werden kann, z.B.:

$$c_j = a_i u_i v_j = a_j u_j v_j = a_k u_k v_j = \cdots \tag{10}$$

$$\alpha = a_i c_i u_j v_j = a_j c_j u_i v_i = a_m c_m u_n v_n = \cdots \tag{11}$$

2 Besondere Symbole

2.1 Ortsvektor

Wir wollen hier die Konvention verwenden, dass wir für den Ortsvektor immer den Buchstaben x verwenden, also in Vektorschreibweise

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{12}$$

bzw. in Indexschreibweise

$$(\vec{x})_i = x_i, \tag{13}$$

wobei x_1 für x steht, x_2 für y, und x_3 für z. Im Gegensatz dazu stehen alle anderen Buchstaben für Vektorfelder, bei denen jede Komponente (potentiell) von allen drei Raumrichtungen (und auch von der Zeit t) abhängen können, z.B.:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z,t) \\ v_2(x,y,z,t) \\ v_3(x,y,z,t) \end{pmatrix} \triangleq v_i \tag{14}$$

2.2 Ortsableitung

$$\vec{\nabla}_i = \partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \Leftrightarrow \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \tag{15}$$

Anmerkung: Wir folgen der Konvention, dass der Differentialoperator nur auf das Objekt rechts davon wirkt. Daher: Jedenfalls Klammerung verwenden, wenn der Operator auf mehrere Objekte wirkt, und wenn man will auch ansonsten zur Übersichtlichkeit. Zum Beispiel lautet die Produktregel:

$$\partial_i(u_i v_j) = (\partial_i u_i)v_j + u_i(\partial_i v_j) \equiv \partial_i u_i v_j + u_i \partial_i v_j \tag{16}$$

2.3 Zeitableitung

$$\partial_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \tag{17}$$

Um Konfusionen vorzubeugen, ist es daher empfehlenswert, den Buchstaben t nicht als Index zu verwenden.

2.4 Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, wenn\ i = j \\ 0, wenn\ i \neq j \end{cases} \tag{18}$$

2.5 Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} 1, \text{wenn } (ijk\ldots) \text{ eine gerade Permutation von } (123\ldots) \text{ ist} \\ -1, \text{wenn } (ijk\ldots) \text{ eine ungerade Permutation von } (123\ldots) \text{ ist} \\ 0 \text{ sonst (i. e. wenn mindestens zwei Indizes gleich sind)} \end{cases} \tag{19}$$

Beispiele:

- $\varepsilon_{123} = 1$ (lt. Definition)
- $\varepsilon_{132} = -1$ (weil eine Permutation notwendig ist: $\varepsilon_{123} \to \varepsilon_{132}$)
- $\varepsilon_{312} = 1$ (weil zwei Permutationen notwendig sind: $\varepsilon_{123} \to \varepsilon_{132} \to \varepsilon_{312}$)
- $\varepsilon_{122} = 0$ (weil der Index 2 doppelt vorkommt)

3 Indexnotation bei Anwendung der Kettenregel

Vektorschreibweise	äquivalente Indexschreibweise	Freier Index
$\vec{\nabla}\,\mathrm{f}(\mathrm{g}(x,y,z)) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{g}} \vec{\nabla}\mathrm{g}(x,y,z)$	$\partial_i\,\mathrm{f}(\mathrm{g}) = \mathrm{f}'(\mathrm{g})\,\partial_i \mathrm{g}$	i
$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(\vec{w}(x,y,z,t)) = \underbrace{D\vec{v}(\vec{w})}_{\text{Fréchet-Ableitung}} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}(t)$	$\partial_t\, v_i(\vec{w}) = \partial_j v_i \partial_t w_j$	i

4 Konvertierung zwischen Vektor- und Indexschreibweise

Regel	Objekt/Operation	Vektorschreibweise	äquivalente Indexschreibweise	Freier Index
(a)	Vektor	$\vec{v}$	v_i	i
(b)	Skalarprodukt	$\vec{u}\cdot\vec{v}$	$u_i v_i$	-
(c)	Betragsquadrat	$\lVert\vec{v}\rVert^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$	$v_i v_i$	-
(d)	Vektorlänge	$\lVert\vec{v}\rVert = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$	$\sqrt{v_i v_i}$	-
(e)	Gradient (skalar)	$\vec{\nabla}\,\mathrm{f}(x,y,z)$	$\partial_i \mathrm{f}$	i
(f)	Divergenz	$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$	$\partial_i v_i$	-
(g)	Kreuzprodukt	$\vec{u}\times\vec{v}$	$\varepsilon_{ijk} u_j v_k$	i
(h)	Rotation	$\vec{\nabla}\times\vec{v}$	$\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k$	i
(i)	Gradient (vektoriell)	$\mathrm{grad}(\vec{v}) \equiv \vec{\nabla}\otimes\vec{v} \equiv \vec{\nabla}\vec{v}$	$(\vec{\nabla}\vec{v})_{ij} \triangleq \partial_i v_j$	i,j
(j)	Laplaceoperator (skalar)	$\vec{\nabla}^2\,\mathrm{f}(x,y,z) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\mathrm{f})$	$\partial_i\partial_i f$	i
(k)	Laplaceoperator (vektoriell)	$\vec{\nabla}^2\vec{v} = \begin{pmatrix}\vec{\nabla}^2 v_1\\ \vec{\nabla}^2 v_2\\ \vec{\nabla}^2 v_3\end{pmatrix}$	$\partial_j\partial_j v_i$	i
(l)	Richtungsableitung von $\vec{v}$ entlang $\vec{u}$	$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v}$	$u_j\partial_j v_i$	i
(m)	Matrix-Vektormultiplikation	$\underline{\underline{\mathrm{M}}}\vec{v}$	$\mathrm{M}_{ij} v_j$	i

Anmerkung zu Punkt (i) (vektorieller Gradient): Das Ergebnis dieser Operation ist (in herkömmlicher Vektornotation) ein Tensor der Stufe zwei, der als Matrix angeschrieben werden kann. Der Index i repräsentiert die Zeilen, und der Index j die Spalten der Matrix. Ebenso repräsentiert in Punkt (m) der Index i die Zeilen und der Index j die Spalten der Matrix $\underline{\underline{\mathrm{M}}}$.

5 Rechenregeln und Umformungen

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{20}$$

$$\delta_{ii} = n \tag{21}$$

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \tag{22}$$

$$\delta_{ij}a_i = a_j \tag{23}$$

$$\delta_{ij}a_j = a_i \tag{24}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \det\begin{pmatrix}\delta_{il} & \delta_{im}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm}\end{pmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{25}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \tag{26}$$

$$\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} = 2!;\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3!;\ \varepsilon_{ijkl}\varepsilon_{ijkl} = 4!, \ldots \tag{27}$$

$$\varepsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0;\ \varepsilon_{ijk}\delta_{ik} = 0;\ \varepsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0 \tag{28}$$

$$\partial_i x_j = \delta_{ij} \tag{29}$$

$$\partial_i x_i = \delta_{ii} = n \tag{30}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} \tag{31}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} \tag{32}$$

$$\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_k a_j = \varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k a_i = 0 \tag{33}$$

Anmerkungen zu Rechenregel (25):

- Bei abweichender Indexbenennung kann man (wenn es einem dann leichter fällt) natürlich die Indizes zur Übersichtlichkeit entsprechend umbenennen (beim freien Index aber dann selbstverständlich in der ganzen Gleichung)
- Bei abweichender Indexreihenfolge kann man die Indizes unter Berücksichtigung von Regel (19) solange permutieren, bis man auf die Darstellung (25) kommt.

Anmerkungen zu den Rechenregeln (21) und (33):

- Der Buchstabe n steht für die Anzahl der Dimensionen (bei Rechnungen im $\mathbb{R}^3$ ist daher $n = 3$).

6 Strategie

Hier eine kleine Strategie zur Umformung und Rechnung:

1. Betrachte zunächst die gegebene Gleichung in Vektorschreibweise. Welche Teile stellen Skalare dar? Vektorprodukte oder Gradienten sind zum Beispiel Skalare. Welche Teile sind vektorwertig? Ist der Gesamtausdruck ein Vektor oder Skalar?
2. Wandle nun mit Hilfe der Regeln aus Kapitel 4 den Ausdruck um. Gehe dabei Schrittweise vor, und weise den freien Index dem Teilausdruck zu, der den Gesamtausdruck zum Vektor macht.

   Beispiel: Gegeben Sei z.B. der Ausdruck (34)

   $$\vec{v} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \tag{34}$$

   $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ist Skalar, erst durch $\vec{c}$ wird der Gesamtausdruck wieder vektoriell. Vergeben wir mal den freien Index, und nennen wir ihn i.

   $$(\vec{v})_i = (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c})_i \tag{35}$$

   In Indexschreibweise:

$$v_i = (\vec{a} \cdot \vec{b})c_i \tag{36}$$

Den Vektor $\vec{v}$ wandeln wir mittels Regel (a) aus Kapitel 4, und das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ mittels Regel (b) aus Kapitel 4 um, wobei wir darauf achten, dass wir den Index i bereits verwendet haben:

$$v_i = a_j b_j c_i \tag{37}$$

3. Die umgewandelte Gleichung kann man nun mit Hilfe der Rechenregeln aus Kapitel 5 umformen. Oft versucht man, zuerst mit Hilfe der Regeln (25), (26), (27) und (28) die Levi-Civita-Symbole entweder loszuwerden, oder in Delta-Symbole umzuwandeln, welche man dann mittels der Regeln (20), (21), (22), (23) und (24) mit den Variablen „kontrahiert".
4. Bei Ableitungen beachtet man streng die Produkt- oder Quotientenregel. Wichtig: Auf die Klammerung, die anzeigt, worauf ein bestimmter Differenzialoperator wirkt, nicht vergessen! Dann Regeln (29) und (33) anwenden.
5. Wenn beim Ausmultiplizieren von Klammern ein Index mehr als zweimal vorkommt, auf jeden Fall neue Indexbezeichnungen vergeben.
6. Nicht vergessen: In einem Produktterm können die Variablen beliebig angeordnet werden. $a_j b_j c_i$ ist dasselbe wie $a_j c_i b_j$. Beides repräsentiert den vektoriellen Ausdruck $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.
7. Mit Hilfe der Regeln aus Kapitel 4 kann die Gleichung wieder in Vektorschreibweise zurückverwandelt werden.

7 Beispiel

Die folgende Gleichung ist umzuformen (wobei $\vec{q}$ ein konstanter Vektor ist):

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{q} \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|} \tag{38}$$

Offensichtlich steht links und rechts vom Gleichheitszeichen ein Vektor. Wir vergeben den freien Index i, und verwenden Regel (h) aus Kapitel 4, um das erste Kreuzprodukt umzuwandeln:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \left(\frac{\vec{q} \times \vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right)_k \tag{39}$$

Weiter geht es mit dem Kreuzprodukt über dem Bruchstrich. Hier ist der für sich genommen freie Index des Teilausdrucks $\vec{q} \times \vec{x}$ (der im Gesamtterm wegen ε_{ijk} nicht mehr frei ist) gemäß Gleichung (39) bereits mit k festgelegt:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{\varepsilon_{klm} q_l x_m}{\|\vec{x}\|} \tag{40}$$

Schließlich können wir noch $\|\vec{x}\|$ mittels Regel (d) aus Kapitel 4 ersetzen, wobei wir beachten, dass die Indizes i, j, k, l und m bereits vergeben sind:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \frac{\varepsilon_{klm} q_l x_m}{\sqrt{x_n x_n}} \tag{41}$$

ε_{klm} und q_i sind konstant. Wir können sie daher vor den Differenzialoperator ∂_j ziehen. Außerdem können wir $\frac{1}{\sqrt{x_n x_n}}$ als $(x_n x_n)^{-1/2}$ ausdrücken:

$$v_i = q_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \partial_j \left[x_m (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{42}$$

Wir wenden die Produktregel an:

$$v_i = q_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\partial_j (x_m)(x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} + x_m \partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{43}$$

Nach Regel (29) ist $\partial_j (x_m) = \delta_{jm}$

$$v_i = q_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\delta_{jm} (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} + x_m \partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} \right] \tag{44}$$

Nebenrechnung zur Berechnung von $\boldsymbol{\partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}}}$:

Wir wenden die Kettenregel an:

$$\partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x_n x_n)^{-\frac{3}{2}} \partial_j (x_n x_n) \tag{45}$$

Auf $\partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}}$ wenden wir die Produktregel an:

$$\partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x_n x_n)^{-\frac{3}{2}} \left[\partial_j (x_n) x_n + x_n \partial_j (x_n) \right] \tag{46}$$

Natürlich ist $\partial_j (x_n) x_n + x_n \partial_j (x_n) = 2 x_n \partial_j x_n$:

$$\partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x_n x_n)^{-\frac{3}{2}} \, 2 x_n \partial_j x_n \tag{47}$$

Nach Regel (29) ist $\partial_j x_n = \delta_{jn}$. Außerdem kürzt sich ½ gegen 2:

$$\partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} = -(x_n x_n)^{-\frac{3}{2}} \, x_n \delta_{jn} \tag{48}$$

Nach Regel (24) ist $x_n \delta_{jn} = x_j$:

$$\partial_j (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} = -x_j (x_n x_n)^{-\frac{3}{2}} \tag{49}$$

Ende der Nebenrechnung

Wir setzen nun das Ergebnis der Nebenrechnung (49) in Gleichung (44) ein:

$$v_i = q_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\delta_{jm} (x_n x_n)^{-\frac{1}{2}} - x_m x_j (x_n x_n)^{-\frac{3}{2}} \right] \tag{50}$$

Das lässt sich natürlich auch so schreiben:

$$v_i = q_l \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\frac{\delta_{jm}}{\sqrt{x_n x_n}} - \frac{x_m x_j}{(x_n x_n)^{3/2}} \right] \tag{51}$$

Wir multiplizieren q_l in die Klammer hinein:

$$v_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \left[\frac{q_l \delta_{jm}}{\sqrt{x_n x_n}} - \frac{q_l x_m x_j}{(x_n x_n)^{3/2}} \right] \tag{52}$$

Wir wandeln $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}$ mittels Regel (25) um:

$$v_i = \left(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \right) \left[\frac{q_l \delta_{jm}}{\sqrt{x_n x_n}} - \frac{q_l x_m x_j}{(x_n x_n)^{3/2}} \right] \tag{53}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$v_i = \frac{q_l \delta_{jm} \delta_{il} \delta_{jm}}{\sqrt{x_n x_n}} - \frac{q_l \delta_{jm} \delta_{im} \delta_{jl}}{\sqrt{x_n x_n}} - \frac{q_l x_m x_j \delta_{il} \delta_{jm}}{(x_n x_n)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_l x_m x_j \delta_{im} \delta_{jl}}{(x_n x_n)^{3/2}} \tag{54}$$

Im Zähler des ersten Bruchs steht $\delta_{jm} \delta_{jm}$. Gemäß Regel (20) ist das gleich $\delta_{jm} \delta_{mj}$. Nach Regel (22) kontrahiert das zu δ_{jj}, und das ist gemäß Regel (21) gleich der Dimension n (hier: 3). Also ist $\delta_{jm} \delta_{jm} = \delta_{jj} = 3$, und somit:

$$v_i = \frac{3 q_l \delta_{il}}{\sqrt{x_n x_n}} - \frac{q_l \delta_{jm} \delta_{im} \delta_{jl}}{\sqrt{x_n x_n}} - \frac{q_l x_m x_j \delta_{il} \delta_{jm}}{(x_n x_n)^{3/2}} + \frac{q_l x_m x_j \delta_{im} \delta_{jl}}{(x_n x_n)^{3/2}} \tag{55}$$

Im Zähler des zweiten Bruchs steht $\delta_{jm} \delta_{im}$. Gemäß Regel (20) ist das dasselbe wie $\delta_{jm} \delta_{mi}$. Nach Regel (22) kontrahiert das zu δ_{ji}:

$$v_i = \frac{3q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{jl}\delta_{ji}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_lx_mx_j\delta_{il}\delta_{jm}}{(x_nx_n)^{3/2}} + \frac{q_lx_mx_j\delta_{im}\delta_{jl}}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{56}$$

Im Zähler des zweiten Bruchs steht nunmehr $\delta_{jl}\delta_{ji}$. Gemäß Regel (20) ist das dasselbe wie $\delta_{lj}\delta_{ji}$. Nach Regel (22) kontrahiert das zu δ_{li}:

$$v_i = \frac{3q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{li}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_lx_mx_j\delta_{il}\delta_{jm}}{(x_nx_n)^{3/2}} + \frac{q_lx_mx_j\delta_{im}\delta_{jl}}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{57}$$

Gemäß Regel (23) kann man im Zähler des dritten Bruchs folgendes vereinfachen: $x_m\delta_{jm} = x_j$.

$$v_i = \frac{3q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{li}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{il}x_jx_j}{(x_nx_n)^{3/2}} + \frac{q_lx_mx_j\delta_{im}\delta_{jl}}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{58}$$

Nun ist $\frac{x_jx_j}{(x_nx_n)^{3/2}}$ im dritten Bruch aber nichts anderes als $\frac{1}{\sqrt{x_nx_n}}$:

$$v_i = \frac{3q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{li}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} + \frac{q_lx_mx_j\delta_{im}\delta_{jl}}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{59}$$

Das δ_{li} im zweiten Bruch ist gemäß Regel (20) dasselbe wie δ_{il}:

$$v_i = \frac{3q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} - \frac{q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} + \frac{q_lx_mx_j\delta_{im}\delta_{jl}}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{60}$$

Die ersten drei Brüche lassen sich nun zusammenfassen:

$$v_i = \frac{q_l\delta_{il}}{\sqrt{x_nx_n}} + \frac{q_lx_mx_j\delta_{im}\delta_{jl}}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{61}$$

Gemäß Regel (23) kann man den Zähler des ersten Bruchs wie folgt weiter vereinfachen: $q_l\delta_{il} = q_i$

$$v_i = \frac{q_i}{\sqrt{x_nx_n}} + \frac{q_lx_mx_j\delta_{im}\delta_{jl}}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{62}$$

Im Zähler des zweiten verbleibenden Bruchs lässt sich gemäß Regel (23) folgendes vereinfachen: $x_m\delta_{im} = x_i$ und $x_j\delta_{jl} = x_l$:

$$v_i = \frac{q_i}{\sqrt{x_nx_n}} + \frac{(q_lx_l)x_i}{(x_nx_n)^{3/2}} \tag{63}$$

Dies lässt sich unter Verwendung der Regeln (a), (b) und (d) in Vektorschreibweise zurückverwandeln:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\vec{q}}{\|\vec{x}\|} + \frac{(\vec{q}\cdot\vec{x})\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}} \tag{64}$$

8 Anhang

Bei der Rück-Umformung von Index-Notation zu Vektor-Matrix-Notation gibt es gelegentlich Ausdrücke, bei denen die Lösung anhand der in Kapitel 4 angegebenen Umformungsregeln nicht sofort offensichtlich ist. Für solche Fälle bietet die folgende Tabelle eine kleine Hilfestellung.

Indexschreibweise	äquivalente Vektor-Matrix-Schreibweise
$\partial_i u_j v_j$	$\vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v})$
$\partial_j u_i v_j$	$\left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T \vec{v} \equiv \vec{\nabla}(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)$
$\mathrm{M}_{ij} v_j$	$\underline{\underline{\mathrm{M}}}\vec{v}$
$v_i \mathrm{M}_{ij}$	$\vec{v}^T \underline{\underline{\mathrm{M}}} \equiv \vec{v} \cdot \underline{\underline{\mathrm{M}}}$
$\partial_i \mathrm{M}_{ij}$	$\vec{\nabla}^T \underline{\underline{\mathrm{M}}} \equiv \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\mathrm{M}}}$
$\partial_j \mathrm{M}_{ij}$	$\left(\vec{\nabla}^T \underline{\underline{\mathrm{M}}}^T\right)^T \equiv \left(\vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\mathrm{M}}}^T\right)^T$
$u_j v_i w_j - u_j v_j w_i$	$\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$
$\partial_j u_i v_j - \partial_i u_j v_j$	$\left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right) \times \vec{v}$
$\partial_i \partial_j v_j - \partial_j \partial_j v_i$	$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v}$

Anmerkung: Die rot unterstrichenen Varianten („inneres Produkt eines Spaltenvektors mit einer Matrix“) können zwar in der Literatur vorkommen, sollten aber vermieden werden, da es über diese Schreibweise keinen allgemeinen Konsens gibt.