Helmuts Kochrezept Nummer 5:

Lokale Koordinatentransformation von Vektorfedern

(Version 4, 22.12.2019)

Dieses „Kochrezept“ erklärt Dir, wie du ein Vektorfeld von einem orthonormalen Koordinatensystem (z.B. kartesische Koordinaten) in ein anderes orthonormales Koordinatensystem (z.B. Kugelkoordinaten) transformierst, und erklärt dir vorab, worum es dabei überhaupt geht.

1 Worum geht’s überhaupt, oder: Was ist eigentlich der Unterschied zwischen „Transformation von Koordinatenpunkten“ und „Koordinatentransformation eines Vektorfeldes“?

1.1 Transformation von Koordinatenpunkten

Die Transformation von Koordinatenpunkten ist leicht verständlich. Nehmen wir an, wir hätten einen Ortsvektor $\vec{r}$, der im $\mathbb{R}^2$ auf den Punkt $x = 1, y = 1$ zeigt. In kartesischen Koordinaten wird dieser Vektor wie folgt über die zwei Längenangaben $x = 1$ und $y = 1$ repräsentiert:

$$[\vec{r}]_{xy} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

In Polarkoordinaten wird derselbe Vektor in über die Länge des Vektors $r = \sqrt{2}$ (Pythagoras) und den Winkel $\varphi = \pi/4$ dargestellt

$$[\vec{r}]_{r\varphi} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \pi/4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

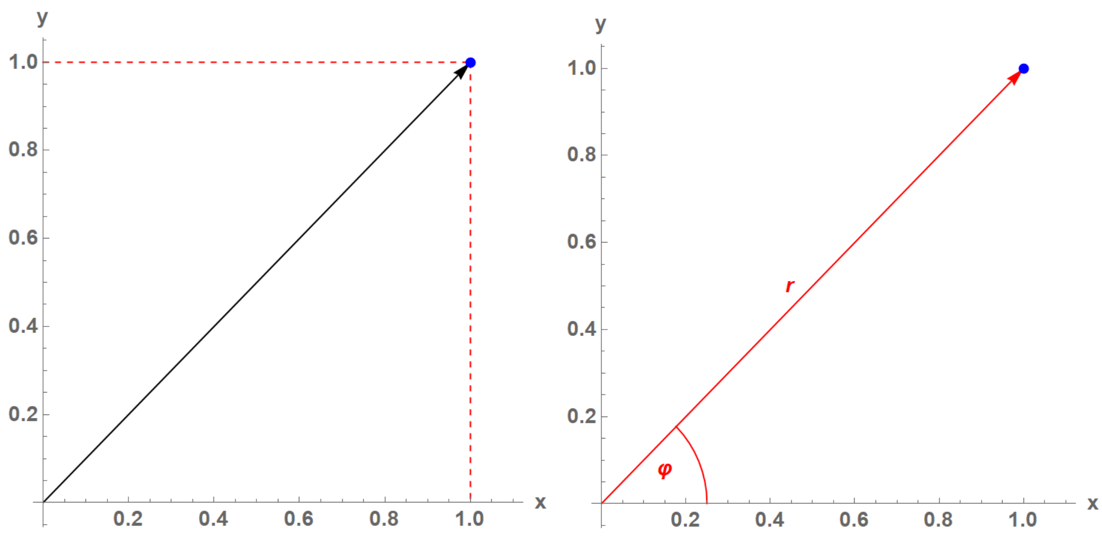

Abbildung 1: Derselbe Ortsvektor einmal in kartesischen Koordinaten und einmal in Polarkoordinaten.

Die Umrechnung von $[\vec{r}]_{xy}$ zu $[\vec{r}]_{r\varphi}$ erfolgt mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, und $\varphi = \arctan(y/x)$ (zumindest im ersten Quadranten). Die Angabe von $\vec{r}$ in „Polarkoordinaten“ bedeutet hier also die Angabe einer Länge und eines Winkels.

Bei der Koordinatentransformation eines Vektorfeldes ist das jedoch, wie im folgenden Kapitel erklärt wird, ein wenig anders!

1.2 Koordinatentransformation eines Vektorfeldes

Ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$ ist eine vektorielle Funktion, die als Input einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ „schluckt“, und als Output einen Vektor im $\mathbb{R}^n$ zurückliefert. Dadurch wird jedem Punkt im $\mathbb{R}^n$ ein Vektor zugeordnet. Dabei kann der „Inputvektor“ im selben Koordinatensystem codiert sein wie der „Outputvektor“, aber auch in einem unterschiedlichen.

1.2.1 Beispiel: Input kartesisch, Output kartesisch

Betrachten wir einmal den Fall des folgenden Vektorfeldes in $\mathbb{R}^2$, welches als Input einen Vektor in kartesischen Koordinaten erwartet, und als Output ebenso einen Vektor in kartesischen Koordinaten zurückliefert:

$$\vec{v} = [\vec{v}(x,y)]_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{y-1}{5} \\ \frac{1-x}{5} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Plottet man dieses Vektorfeld, dann sieht es so aus:

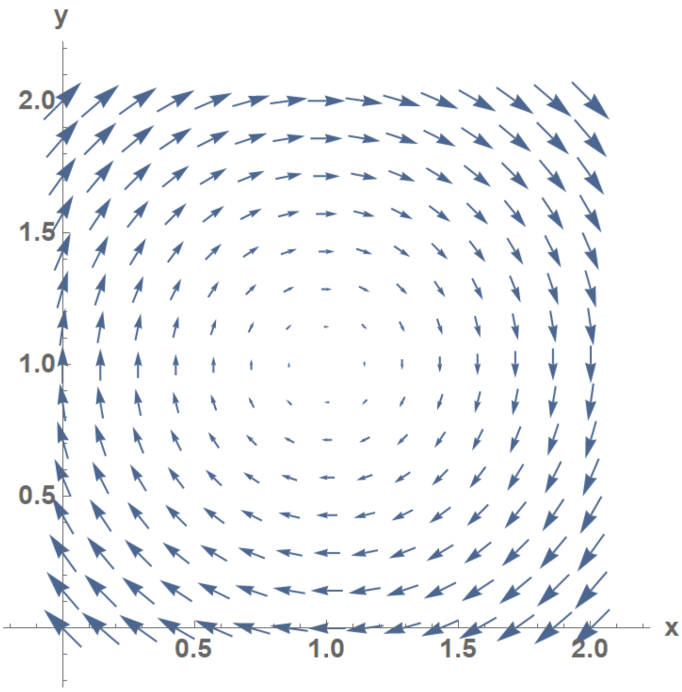

Abbildung 2: Das Vektorfeld $[\vec{v}(x,y)]_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{y-1}{5} \\ \frac{1-x}{5} \end{pmatrix}$.

Warum ist das so? Nun, nehmen wir z.B. als Input den Ortsvektor $\begin{pmatrix} 1.7 \\ 1.7 \end{pmatrix}$ (in kartesischen Koordinaten), dann erhalten wir als Output den Vektor $[\vec{v}(1.7,1.7)]_{xy} = \begin{pmatrix} 0.14 \\ -0.14 \end{pmatrix}$ (wiederum in kartesischen Koordinaten). Dem Punkt (1.7,1.7) ist also einen kurzer Vektor zugeordnet, der im Winkel von 45° nach rechts unten zeigt (siehe Abbildung 3).

Genau so kann man sich das für jeden beliebigen anderen Punkt überlegen.

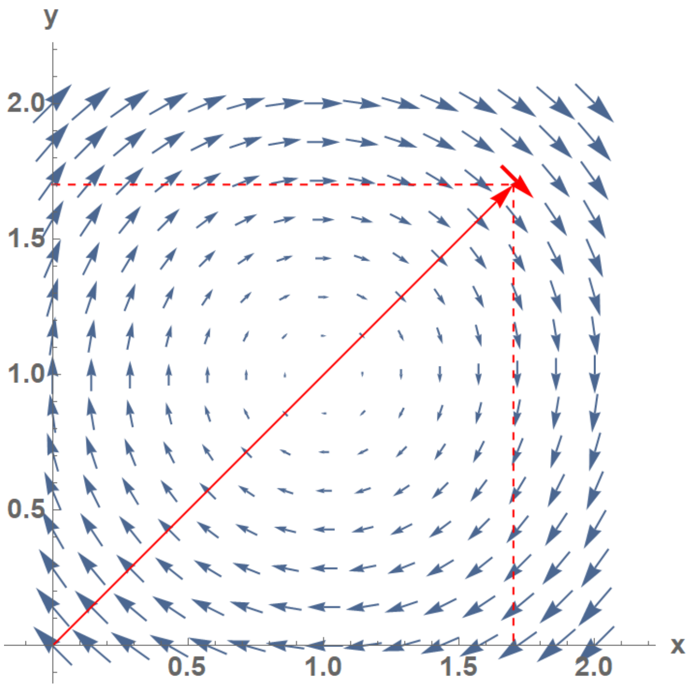

Abbildung 3: Dem Punkt $x = 1.7, y = 1.7$ ist durch das Vektorfeld $\vec{v}$ ein kurzer Vektor zugeordnet, der nach rechts unten zeigt.

1.2.2 Beispiel: Input „polar", Output „kartesisch"

Man könnte das Vektorfeld $\vec{v}$ nun beispielsweise so umwandeln, dass es als Input einen Vektor in Polarkoordinaten (mit Länge r und Winkel φ) erwartet, aber den Outputvektor immer noch kartesisch darstellt. Dies geschieht einfach durch Substitution von $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$:

$$\vec{v} = [\vec{v}(r,\varphi)]_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{r\sin(\varphi)-1}{5} \\ \frac{1-r\cos(\varphi)}{5} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Probe: Setzt man nun denselben Ortsvektor wie zuvor ein, nur diesmal in Polarkoordinaten $r = \sqrt{1.7^2 + 1.7^2}$und $\varphi = \pi/4$, dann erhält man wieder denselben Output (in kartesischen Koordinaten) wie zuvor:

$$\left[\vec{v}\left(\sqrt{1.7^2 + 1.7^2}, \frac{\pi}{4}\right)\right]_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{1.7^2+1.7^2}\sin(\pi/4)-1}{5} \\ \frac{1-\sqrt{1.7^2+1.7^2}\cos(\pi/4)}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.14 \\ -0.14 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Wir wollen aber hier etwas anderes: Wir wollen das Vektorfeld $\vec{v}$ so umwandeln, dass **sowohl der Inputvektor, als auch der Outputvektor „in Polarkoordinaten"** dargestellt werden, **wobei das aber für den Outputvektor etwas anderes bedeutet als für den Inputvektor!**

1.2.3 Beispiel: Input „polar" und Output „polar"

Wenn wir sagen, auch der Output des Vektorfeldes $\vec{v}$ soll „in Polarkoordinaten" erfolgen, dann bedeutet das **nicht**, dass der Output über die Länge r und den Winkel φ codiert wird. Vielmehr wird an den Punkt, um den es geht (z.B. der Punkt $x = 1.7, y = 1.7$) **ein kleines, lokales kartesisches Koordinatensystem „angehängt"**, dessen eine Achsenrichtung radial entlang des Normalvektors $\vec{e}_r$ zeigt, und dessen andere Achsenrichtung in Richtung der Tangente der positiven Drehrichtung φ (entlang des Normalvektors $\vec{e}_\varphi$) zeigt (siehe Abbildung 4). **Dieses Koordinatensystem ist „lokal", d.h., es gilt nur in diesem Punkt!**

Das bedeutet, dass der „polare" Outputvektor nicht eine Länge r und Winkel φ codiert, sondern zwei kartesische Längenangaben hat, nämlich die Länge der Projektion auf die lokale $\vec{e}_r$-Achse, und die Länge der Projektion auf die lokale $\vec{e}_\varphi$-Achse).

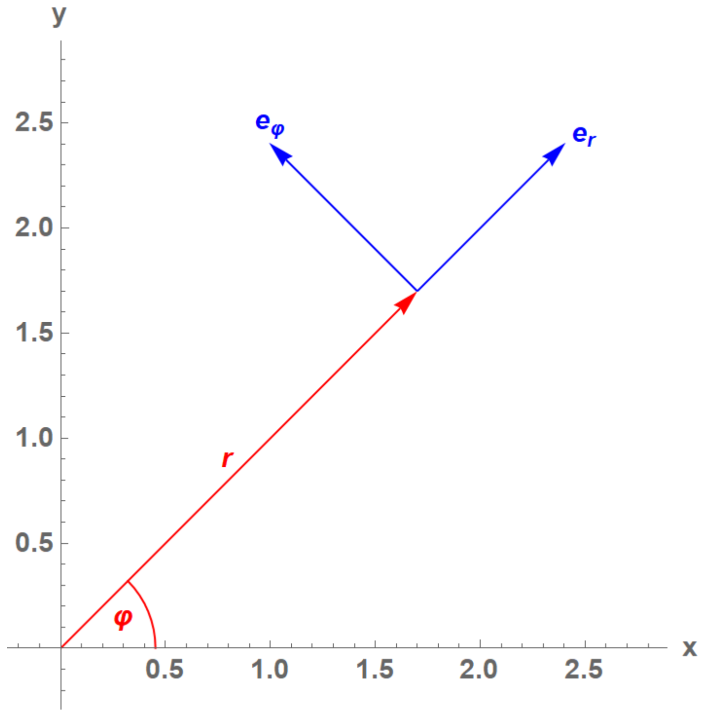

Abbildung 4: Das lokale Koordinatensystem $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ im Punkt $x = 1.7, y = 1.7$.

In unserem Beispiel sollte das entsprechend transformierte Vektorfeld $[\vec{v}(r,\varphi)]_{polar}$ beim Input $r = \sqrt{1.7^2 + 1.7^2}$ und $\varphi = \pi/4$ (entspricht $x = 1.7, y = 1.7$) die zwei Outputkoordinaten $-\sqrt{0.14^2 + 0.14^2} = -0.19799$ und 0 liefern.

Begründung: Der Outputvektor zeigt an dieser Stelle im Winkel von 45° nach rechts unten, also genau entgegengesetzt zu $\vec{e}_\varphi$ (vgl. Abbildung 3 und Abbildung 4). Damit wird die ganze Länge des Outputvektors, nämlich $\sqrt{0.14^2 + 0.14^2}$ auf die erste Koordinate $\vec{e}_\varphi$ projiziert. Der andere Vektor $\vec{e}_r$ steht genau orthogonal; daher ist die zweite Koordinate gleich Null.

Das transformierte Vektorfeld $[\vec{v}(r,\varphi)]_{\vec{e}_r\vec{e}_\varphi}$ mit den entsprechenden Eigenschaften sieht so aus:

$$[\vec{v}(r,\varphi)]_{\vec{e}_r\vec{e}_\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\varphi)-\cos(\varphi)}{5} \\ \frac{\sin(\varphi)+\cos(\varphi)-r}{5} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Probe:

$$\left[\vec{v}\left(\sqrt{1.7^2 + 1.7^2}, \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\vec{e}_r\vec{e}_\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{5} \\ \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{1.7^2+1.7^2}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.19799 \end{pmatrix} \square \tag{7}$$

Im folgenden Kapitel wird gezeigt, wie man eine derartige Transformation berechnet.

2 Schritt-für-Schritt Anleitung zur Koordinatentransformation

2.1 Theoretische Anleitung

2.1.1 Angabe

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^3$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit für allgemeine Vektorfelder in $\mathbb{R}^n$). Das Vektorfeld akzeptiert als Input einen Vektor in den „alten" Koordinaten r, s, t, und liefert als Ergebnis einen Vektor in den „alten" lokalen Koordinaten $\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_t$ zurück.

$$\vec{v} = [\vec{v}(r,s,t)]_{rst} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_r(r,s,t) \\ \mathrm{v}_s(r,s,t) \\ \mathrm{v}_t(r,s,t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Anmerkung: Bei kartesischen Ursprungskoordinaten x, y, z gibt es keinen Unterschied zwischen lokalen Koordinaten $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ und globalen Koordinaten x, y, z

Gesucht ist das transformierte Vektorfeld $[\vec{v}(u,v,w)]_{uvw}$, das als Input einen Vektor in den „neuen" Koordinaten u, v, w akzeptiert, und als Ergebnis auch einen Vektor in den „neuen" lokalen Koordinaten $\vec{e}_u\vec{e}_v\vec{e}_w$ zurückliefert.

Bekannt sei die punktweise Koordinatentransformation vom „neuen" ins „alte" Koordinatensystem:

$$r = \mathrm{r}(u,v,w)\,;\ s = \mathrm{s}(u,v,w)\,;\ t = \mathrm{t}(u,v,w) \tag{9}$$

2.1.2 Berechnung

Schritt 1:

Wir setzen (9) in (8) ein, und erhalten somit:

$$[\vec{v}(u,v,w)]_{rst} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_r(u,v,w) \\ \mathrm{v}_s(u,v,w) \\ \mathrm{v}_t(u,v,w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_r(\mathrm{r}(u,v,w)\,, \mathrm{s}(u,v,w)\,, \mathrm{t}(u,v,w)) \\ \mathrm{v}_s(\mathrm{r}(u,v,w)\,, \mathrm{s}(u,v,w)\,, \mathrm{t}(u,v,w)) \\ \mathrm{v}_t(\mathrm{r}(u,v,w)\,, \mathrm{s}(u,v,w)\,, \mathrm{t}(u,v,w)) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Schritt 2:

Die <u>noch nicht normierten</u> („NN") Basisvektoren der „neuen" Basis $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ können in der „alten" Basis $\vec{e}_r, \vec{e}_s, \vec{e}_t$ mit Hilfe von (9) wie folgt ausgedrückt werden:

$$[\vec{e}_u^{NN}]_{rst} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, \mathrm{r}(u,v,w)}{\partial u} \\ \frac{\partial\, \mathrm{s}(u,v,w)}{\partial u} \\ \frac{\partial\, \mathrm{t}(u,v,w)}{\partial u} \end{pmatrix};\ [\vec{e}_v^{NN}]_{rst} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, \mathrm{r}(u,v,w)}{\partial v} \\ \frac{\partial\, \mathrm{s}(u,v,w)}{\partial v} \\ \frac{\partial\, \mathrm{t}(u,v,w)}{\partial v} \end{pmatrix};\ [\vec{e}_w^{NN}]_{rst} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, \mathrm{r}(u,v,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial\, \mathrm{s}(u,v,w)}{\partial w} \\ \frac{\partial\, \mathrm{t}(u,v,w)}{\partial w} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Schritt 3:

Die Basisvektoren müssen normiert werden:

$$[\vec{e}_u]_{rst} = \frac{[\vec{e}_u]_{rst}^{NN}}{\|[\vec{e}_u]_{rst}^{NN}\|};\ [\vec{e}_v]_{rst} = \frac{[\vec{e}_v]_{rst}^{NN}}{\|[\vec{e}_v]_{rst}^{NN}\|};\ [\vec{e}_w]_{rst} = \frac{[\vec{e}_w]_{rst}^{NN}}{\|[\vec{e}_w]_{rst}^{NN}\|} \tag{12}$$

Schritt 4:

Das transformierte Vektorfeld $[\vec{v}(u,v,w)]_{uvw}$ kann nun mittels der Ergebnisse (11) und (12) berechnet werden:

$$[\vec{v}(u,v,w)]_{uvw} = \begin{pmatrix} [\vec{e}_u]_{rst} \cdot [\vec{v}(u,v,w)]_{rst} \\ [\vec{e}_v]_{rst} \cdot [\vec{v}(u,v,w)]_{rst} \\ [\vec{e}_w]_{rst} \cdot [\vec{v}(u,v,w)]_{rst} \end{pmatrix} \tag{13}$$

Da das innere Vektorprodukt dasselbe ist wie das Matrixprodukt aus Zeilen- und Spaltenvektor, kann man Gleichung (13) auch wie folgt als Matrixprodukt anschreiben:

$$[\vec{v}(u,v,w)]_{uvw} = \begin{pmatrix} - [\vec{e}_u]_{rst}{}^T - \\ - [\vec{e}_v]_{rst}{}^T - \\ -[\vec{e}_w]_{rst}{}^T - \end{pmatrix} [\vec{v}(u,v,w)]_{rst} \tag{14}$$

Explizit ausgeschrieben:

$$[\vec{v}(u,v,w)]_{uvw} = \underline{\underline{A}}\,[\vec{v}(u,v,w)]_{rst} \tag{15}$$

wobei

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} - [\vec{e}_u]_{rst}{}^T - \\ - [\vec{e}_v]_{rst}{}^T - \\ -[\vec{e}_w]_{rst}{}^T - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\, \mathrm{r}(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial\, \mathrm{s}(u,v,w)}{\partial u} & \frac{\partial\, \mathrm{t}(u,v,w)}{\partial u} \\ \frac{\partial\, \mathrm{r}(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial\, \mathrm{s}(u,v,w)}{\partial v} & \frac{\partial\, \mathrm{t}(u,v,w)}{\partial v} \\ \frac{\partial\, \mathrm{r}(u,v,w)}{\partial w} & \frac{\partial\, \mathrm{s}(u,v,w)}{\partial w} & \frac{\partial\, \mathrm{t}(u,v,w)}{\partial w} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Diese Transformationsmatrix $\underline{\underline{A}}$ ist die transponierte Jacobi-Matrix des Vektorfeldes $[\vec{v}(\mathrm{r}(u,v,w)\,,\mathrm{s}(u,v,w)\,,\mathrm{t}(u,v,w))]_{rst}$.

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{J}}^T \tag{17}$$

Weil sie aber aus orthonormalen Basisvektoren aufgebaut ist, ist sie selber orthonormal, und damit ist sie auch die <u>inverse</u> Jacobi-Matrix des Vektorfeldes $[\vec{v}(\mathrm{r}(u,v,w)\,,\mathrm{s}(u,v,w)\,,\mathrm{t}(u,v,w))]_{rst}$:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{J}}^{-1} \tag{18}$$

Weiters gilt damit natürlich:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{J}} \tag{19}$$

Damit kann leicht die zu (15) inverse Transformation angeschrieben werden:

$$[\vec{v}(u,v,w)]_{rst} = \underline{\underline{A}}^T\,[\vec{v}(u,v,w)]_{uvw} \tag{20}$$

2.2 Praktisches Beispiel

2.2.1 Angabe

Gegeben sei das folgende Vektorfeld $\vec{v}$ in kartesischen Koordinaten.

$$\vec{v} = [\vec{v}(x,y,z)]_{xyz} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix} \tag{21}$$

Gesucht ist das transformierte Vektorfeld $[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{r\vartheta\varphi}$, das als Input einen Vektor in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ akzeptiert, und als Ergebnis einen Vektor in den lokalen Koordinaten $\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ zurückliefert.

Bekannt sei die punktweise Koordinatentransformation von Kugelkoordinaten in kartesischen Koordinaten:

$$\mathrm{x}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\,;\ \mathrm{y}(r,\vartheta,\varphi) = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\,;\ \mathrm{z}(r,\vartheta,\varphi) = r\cos(\vartheta) \tag{22}$$

2.2.2 Berechnung

Schritt 1:

Wir setzen (22) in (21) ein, und erhalten somit:

$$[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{xyz} = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_x(r,\vartheta,\varphi) \\ \mathrm{v}_y(r,\vartheta,\varphi) \\ \mathrm{v}_z(r,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) - r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{23}$$

Schritt 2:

Die nicht normierten („NN") Basisvektoren $\vec{e}_r^{NN}, \vec{e}_\vartheta^{NN}, \vec{e}_\varphi^{NN}$ können in der kartesischen Basis $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$[\vec{e}_r^{NN}]_{xyz} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\,\mathrm{x}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} \\ \frac{\partial\,\mathrm{y}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} \\ \frac{\partial\,\mathrm{z}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} \end{pmatrix} \overset{(22)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial r} r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$[\vec{e}_\vartheta^{NN}]_{xyz} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\,\mathrm{x}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial\,\mathrm{y}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial\,\mathrm{z}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \overset{(22)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \vartheta} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ -r\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$[\vec{e}_\varphi^{NN}]_{xyz} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\,\mathrm{x}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial\,\mathrm{y}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial\,\mathrm{z}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \overset{(22)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Schritt 3:

Die Basisvektoren (24), (25) und (26) müssen noch normiert werden:

$$\left\|[\vec{e}_r^{NN}]_{xyz}\right\| \overset{(24)}{=} \sqrt{\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)+\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)+\cos^2(\vartheta)} = 1 \tag{27}$$

$$\left\|[\vec{e}_\vartheta^{NN}]_{xyz}\right\| \overset{(25)}{=} \sqrt{r^2\cos^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)+r^2\cos^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\vartheta)} = r \tag{28}$$

$$\left\|[\vec{e}_\varphi^{NN}]_{xyz}\right\| \overset{(26)}{=} \sqrt{r^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi)+r^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi)} = r\sin(\vartheta) \tag{29}$$

$$[\vec{e}_r]_{xyz} = \frac{[\vec{e}_r^{NN}]_{xyz}}{\left\|[\vec{e}_r^{NN}]_{xyz}\right\|} = \begin{pmatrix}\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi)\\ \cos(\vartheta)\end{pmatrix} \tag{30}$$

$$[\vec{e}_\vartheta]_{xyz} = \frac{[\vec{e}_\vartheta^{NN}]_{xyz}}{\left\|[\vec{e}_\vartheta^{NN}]_{xyz}\right\|} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix}r\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\\ r\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\\ -r\sin(\vartheta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\\ \cos(\vartheta)\sin(\varphi)\\ -\sin(\vartheta)\end{pmatrix} \tag{31}$$

$$[\vec{e}_\varphi]_{xyz} = \frac{[\vec{e}_\varphi^{NN}]_{xyz}}{\left\|[\vec{e}_\varphi^{NN}]_{xyz}\right\|} = \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\begin{pmatrix}-r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\\ r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(\varphi)\\ \cos(\varphi)\\ 0\end{pmatrix} \tag{32}$$

Schritt 4:

Wir berechnen das transformierte Vektorfeld $[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{r\vartheta\varphi}$ mittels Transformationsmatrix:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix}- & [\vec{e}_r]_{xyz}^{\,T} & -\\ - & [\vec{e}_\vartheta]_{xyz}^{\,T} & -\\ - & [\vec{e}_\varphi]_{xyz}^{\,T} & -\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta)\\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -\sin(\vartheta)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\end{pmatrix} \tag{33}$$

Es gilt:

$$[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{r\vartheta\varphi} = \underline{\underline{A}}\,[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{xyz} \tag{34}$$

Einsetzen von (33) und (23) in (34) ergibt:

$$[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{r\vartheta\varphi} = \begin{pmatrix}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta)\\ \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & -\sin(\vartheta)\\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)-r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)+r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi)\\ r\cos(\vartheta)\end{pmatrix} \tag{35}$$

Ausgerechnet und vereinfacht ergibt dies:

$$\boxed{[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{r\vartheta\varphi} = \begin{pmatrix}r\\ 0\\ r^2\cos(\vartheta)\sin(\varphi)\end{pmatrix}} \tag{36}$$

2.2.3 Rechnung „in die andere Richtung“

Aufgabe: Wir nehmen das Ergebnis (36), und wollen zunächst $[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{xyz}$ herleiten. Dies machen wir durch Umkehrung der Matrixgleichung (34):

$$[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{xyz} = \underline{\underline{A}}^{-1}[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{r\vartheta\varphi} \tag{37}$$

Wegen (19) können wir schreiben:

$$[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{xyz} = \underline{\underline{A}}^{T}[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{r\vartheta\varphi} \tag{38}$$

Setzen wir die transponierte Matrix (33) und Vektor (36) ein:

$$[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{xyz} = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & \cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\vartheta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r^2\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \end{pmatrix} \tag{39}$$

Das Ergebnis lautet:

$$[\vec{v}(r,\vartheta,\varphi)]_{xyz} = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) - r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) + r^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \tag{40}$$

Vergleichen wir die Terme mit den Transformationsregeln (22), können wir dies Umformen zu

$$[\vec{v}(x,y,z)]_{xyz} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix} \tag{41}$$

was mit der Ausgangsgleichung (21) übereinstimmt.

3 Anhang: Differentialoperatoren in verschiedenen Koordinatensystemen

3.1 Kartesisch

- **Nabla-Operator**

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix};\ (\vec{\nabla})_i = \partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{42}$$

- **Laplace-Operator**

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{43}$$

- **Gradient (skalar)**

$$\mathrm{grad}(\mathrm{f}(\vec{r})) = \vec{\nabla}\,\mathrm{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \partial_i f \tag{44}$$

- **Divergenz**
  (wenn 0 … quellenfrei)

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\partial\, v_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial\, v_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial\, v_z(\vec{r})}{\partial z};\ (\vec{\nabla}\cdot\vec{v})_i = \partial_i v_i \tag{45}$$

- **Rotation**
  (wenn 0 … wirbelfrei; ∃ Potential ϕ: $\vec{\nabla}\phi = \vec{v}(\vec{r})$)

$$\operatorname{rot}\begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \vec{\nabla}\times\begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk}\partial_j x_k \tag{46}$$

- **Vektorgradient (ja, auch das gibt's…)**

$$\operatorname{grad}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\otimes\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{47}$$

3.2 Zylinderkoordinaten

- **Nabla-Operator**

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{48}$$

- **Laplace-Operator**

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{49}$$

- **Gradient (skalar)**

$$\operatorname{grad}(\mathrm{f}(r,\varphi,z)) = \vec{\nabla}\,\mathrm{f}(\vec{r}) = \vec{e}_r\frac{\partial f(r,\varphi,z)}{\partial r} + \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi\frac{\partial f(r,\varphi,z)}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial f(r,\varphi,z)}{\partial z} \tag{50}$$

- **Divergenz**
  (wenn 0 … quellenfrei)

$$\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} v_r(r,\varphi,z) \\ v_\varphi(r,\varphi,z) \\ v_z(r,\varphi,z) \end{pmatrix}_{r\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{51}$$

- **Rotation**
  (wenn 0 … wirbelfrei; ∃ Potential ϕ: $\vec{\nabla}\phi = \vec{v}(\vec{r})$)

$$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix} v_r(r,\varphi,z) \\ v_\varphi(r,\varphi,z) \\ v_z(r,\varphi,z) \end{pmatrix}_{r\varphi z} = \vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\vec{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi) - \frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\right) \tag{52}$$

3.3 Kugelkoordinaten

- **Nabla-Operator**

$$\vec{\nabla}= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{53}$$

- **Laplace-Operator**

$$\begin{aligned}\Delta\,\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi) = \vec{\nabla}^2\,\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi) &= \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi)\\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi)) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\,\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\,\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{54}$$

- **Gradient (skalar)**

$$\mathrm{grad}(\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi)) = \vec{\nabla}\,\mathrm{f}(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi} \tag{55}$$

- **Divergenz**
  (wenn 0 … quellenfrei)

$$\vec{\nabla}\cdot\begin{pmatrix} v_r(r,\vartheta,\varphi)\\ v_\vartheta(r,\vartheta,\varphi)\\ v_\varphi(r,\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}_{r\vartheta\varphi} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(v_\vartheta\sin(\vartheta)) + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} \tag{56}$$

- **Rotation**
  (wenn 0 … wirbelfrei; ∃ Potential ϕ: $\vec{\nabla}\phi = \vec{\mathrm{v}}(\vec{r})$)

$$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix} v_r(r,\vartheta,\varphi)\\ v_\varphi(r,\vartheta,\varphi)\\ v_z(r,\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}_{r\vartheta\varphi} = \begin{pmatrix}\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(v_\varphi\sin(\vartheta)\right) - \frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\\ \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\varphi\right)\\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\vartheta) - \frac{\partial v_r}{\partial\vartheta}\right]\end{pmatrix}_{r\vartheta\varphi} \tag{57}$$