Helmuts Kochrezept Nummer 6:

Ausdrücken von Raumladungsdichten mittels Delta-Distribution in kartesischen und krummlinigen Koordinaten

(Version 3, 04.05.2018)

Dieses „Kochrezept" erklärt Dir, wie du Raumladungsdichten von Punkt-, Linien- und Flächenladungen mittels der Deltadistribution (und Heavisidefunktion) darstellst. Besonders wird auf die Fragestellung eingegangen, warum in krummlinigen Koordinaten - je nach Problem (scheinbar willkürlich) - manchmal Vorfaktoren der Funktionaldeterminante in der Raumladungsdichtefunktion aufscheinen, und manchmal dann wieder doch nicht.

Voraussetzung zum Verständnis dieses Dokuments ist, dass Du die Funktionsweise der Deltadistribution bzw. Heaviside-Funktion prinzipiell bereits verstanden hast.

1 Kartesische Koordinaten

1.1 Punktladung

Fangen wir harmlos an: Gegeben sei eine Punktladung q_0 am (kartesischen) Koordinatenpunkt (x_0, y_0, z_0). Die Raumladungsdichte kann dann mittels folgender Funktion dargestellt werden:

$$\rho(x,y,z) = q_0\, \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0) \tag{1}$$

Wenn man weiß, dass die Deltadistribution bei einem Einheitenvergleich die reziproke Einheit des Arguments zurückliefert, kann man diese Darstellung mittels Einheitenvergleich leicht auf Plausibilität überprüfen:

$$\underbrace{\rho(x,y,z)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{q_0}_{[C]}\, \underbrace{\delta(x - x_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\, \underbrace{\delta(y - y_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\, \underbrace{\delta(z - z_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \tag{2}$$

Über Funktionaldeterminanten müssen wir uns in kartesischen Koordinaten sowieso nicht den Kopf zerbrechen.

Betrachten wir nun abschließend das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$:

$$Q_{ges} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = q_0 \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0)\, dx\, dy\, dz = q_0 \tag{3}$$

Die Sache funktioniert also.

Obwohl das Beispiel trivial ist, gibt es doch eine Tatsache, die man sich bewusst machen sollte: Normalerweise liefert ein Integral $dx\, dy\, dz$ ein Volumen. Jedoch reduziert jede der Deltadistributionen im Integranden von Formel (3) die Dimension des Integrals um eins! Zum Beispiel „fixiert" $\delta(x - x_0)$ die x-Koordinate mit x_0, und das restliche Integral $dy\, dz$ könnte (potentiell) nur mehr eine Fläche ausrechnen. Da aber auch y und z von Deltadistributionen „fixiert" werden, ist das gesamte Integral „einheitenlos".

Die reziproken Einheiten $\left[\frac{1}{m}\right]\left[\frac{1}{m}\right]\left[\frac{1}{m}\right]$ der Deltadistributionen $\delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0)$ heben das Volumsintegral gewissermaßen völlig auf.

1.2 Linienladung

Betrachten wir nun als nächstes einen unendlich dünnen, homogen geladenen Draht mit der Linienladungsdichte τ_0 entlang der z-Achse von $z = -L$ bis $z = +L$. Die Raumladungsdichte kann in diesem Fall wie folgt dargestellt werden:

$$\rho(x, y, z) = \tau_0\, \delta(x)\, \delta(y)\, \theta(L + z)\, \theta(L - z) \tag{4}$$

wobei $\theta(x)$ die Heavisidefunktion repräsentiert. Da die Heavisidefunktion einheitenlos ist, können wir folgenden Einheitenvergleich anstellen:

$$\underbrace{\rho(x, y, z)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{\tau_0}_{\left[\frac{C}{m}\right]}\, \underbrace{\delta(x)}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\, \underbrace{\delta(y)}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\, \underbrace{\theta(L + z)\, \theta(L - z)}_{[1]} \tag{5}$$

Das passt also. Betrachten wir nun, was passiert, wenn wir wieder das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$Q_{ges} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \tau_0 \iiint_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \delta(y)\, \theta(L + z)\, \theta(L - z)\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

Wertet man eine Heavisidefunktion der Form $\theta(a + z)$ im Integral aus, wird einfach die untere Integralgrenze auf $z = a$ festgelegt. Genauso legt eine Heavisidefunktion der Form $\theta(b - z)$ die obere Integralgrenze mit $z = b$ fest. Somit kann man das Integral (6) auch so anschreiben:

$$Q_{ges} = \tau_0 \int_{z=-L}^{L} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \delta(y)\, dx\, dy\, dz \tag{7}$$

Das Volumsintegral $dx\, dy\, dz$ degeneriert also zu einem Streckenintegral entlang der z-Achse von $z = -L$ bis $z = +L$ (x und y werden ja weiterhin von den Deltadistributionen „fixiert"). Das passt wunderbar, weil nun eine Linienladungsdichte („Ladung pro Länge") mit einer Streckenlänge multipliziert wird:

$$Q_{ges} = \underbrace{\tau_0}_{\substack{Ladung\\ pro\\ Länge}} \underbrace{\int_{z=-L}^{L} \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty}}_{Streckenintegral\ (Länge\ in\ z-Richtung)} \delta(x)\, \delta(y)\, dx\, dy\, dz = \tau_0 \cdot 2L \tag{8}$$

1.3 Flächenladung

Betrachten wir zum Abrunden noch eine unendlich dünne, rechteckige, homogen geladene Platte in der xy-Ebene, die sich in x-Richtung von $-a$ bis a, und in y-Richtung von $-b$ bis b erstreckt. Die Flächenladungsdichte dieser Platte sei σ_0.

Hier ist die Raumladungsdichtefunktion, welche diese Konfiguration repräsentiert:

$$\rho(x, y, z) = \sigma_0\, \theta(a + x)\, \theta(a - x)\, \theta(b + y)\, \theta(b - y)\, \delta(z) \tag{9}$$

Hier der Einheitenvergleich:

$$\underbrace{\rho(x, y, z)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{\sigma_0}_{\left[\frac{C}{m^2}\right]}\, \underbrace{\theta(a + x)\, \theta(a - x)}_{[1]}\, \underbrace{\theta(b + y)\, \theta(b - y)}_{[1]}\, \underbrace{\delta(y)}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \tag{10}$$

Wie erwartet: Auch hier ist alles in Ordnung.

Das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ sieht nun so aus:

$$Q_{ges} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sigma_0 \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(a+x)\,\theta(a-x)\,\theta(b+y)\,\theta(b-y)\,\delta(z)\,dx\,dy\,dz \qquad (11)$$

Nach Umlegung der Heavisidefunktionen auf Integralgrenzen für x und y reduziert sich dieses Integral zu:

$$Q_{ges} = \sigma_0 \int\limits_{z=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-b}^{b} \int\limits_{x=-a}^{a} \delta(z)\,dx\,dy\,dz \qquad (12)$$

Das Volumsintegral $dx\,dy\,dz$ degeneriert also zu einem Flächenintegral in der xy-Ebene von $x = -a$ bis $x = +a$ und $y = -b$ bis $y = +b$. Das war zu erwarten, weil nur mehr eine Koordinate mittels $\delta(z)$ „festhalten", und jetzt - wie erhofft – nunmehr eine Flächenladungsdichte („Ladung pro Flächeneinheit") mit einer Fläche multipliziert wird:

$$Q_{ges} = \underbrace{\sigma_0}_{\substack{Ladung\\ pro\\ Fläche}} \underbrace{\int\limits_{z=-\infty}^{\infty} \int\limits_{y=-b}^{b} \int\limits_{x=-a}^{a} \delta(z)\,dx\,dy\,dz}_{Flächenintegral\ (Fläche)} = \sigma_0 \cdot 2a \cdot 2b \qquad (13)$$

2 Zylinderkoordinaten

2.1 Punktladung

Betrachten wir nun eine Punktladung q_0 am Koordinatenpunkt (r_0, φ_0, z_0), der aber jetzt in Zylinderkoordinaten angegeben ist. In der Formel für die Raumladungsdichte taucht nun plötzlich die reziproke Funktionaldeterminate für Zylinderkoordinaten $\frac{1}{r}$ auf:

$$\rho(r,\varphi,z) = \tfrac{1}{r} q_0\,\delta(r-r_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\delta(z-z_0) \qquad (14)$$

Versuch einer anschaulichen Erklärung

Eine anschauliche Erklärung hierfür ist, dass jede einzelne Koordinate, über die wir integrieren (z.B. $\int dx$) zunächst eigentlich ein Streckenintegral darstellt. Erst die Deltadistribution im Integral „pickt" gewissermaßen einen einzelnen „Punkt" der Strecke heraus und bringt so das Streckenintegral zum „kollabieren". Beispielsweise „pickt" (in kartesischen Koordinaten) das Integral $\int \delta(x-x_0)\,dx$ aus dem Streckenintegral $\int dx$ den einzelnen Punkt x_0 heraus. Für unsere Anschauung (Mathematiker bitte weghören) können wir uns vorstellen, dass die berechnete Strecke so kurz wird, dass sie zu einem Punkt degeneriert.

Aber in Zylinderkoordinaten wird ein Streckenintegral entlang des Zylinderumfangs so dargestellt: $\int r d\varphi$. Der Faktor r stammt aus der Funktionaldeterminante, und ist anschaulich leicht zu verstehen, wenn man bedenkt, dass ein kleines Winkelinkrement $d\varphi$ bei einem gewissen Radius r eine umso größere intefesimale Strecke entlang des Umfangs repräsentiert, je größer der Wert von r ist.

Wenn wir aber nun aus dem Integral $\int r d\varphi$ einfach nur mit $\delta(\varphi-\varphi_0)$ einen bestimmten Winkel φ_0 „herauspicken" würden, dann wäre – wie beim normalen Streckenintegral - die herausgepickte „Strecke-die-zum-Punkt-degeneriert" (schlampig gesprochen) umso „länger", je größer r wird. Das wollen wir nicht. Um dies zu korrigieren, und aus dem Streckenintegral $\int r d\varphi$ ein echtes „Punktintegral" zu machen, müssen wir durch r dividieren.

Erklärung über Einheitenvergleich

Wem die obige Erklärung zu „hand-waving" ist, kann sich mit dem Einheitenvergleich überzeugen, dass der Faktor $\frac{1}{r}$ notwendig ist:

$$\underbrace{\rho(r,\varphi,z)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{q_0}_{[C]} \underbrace{\frac{1}{r}}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \underbrace{\delta(r-r_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \underbrace{\delta(\varphi-\varphi_0)}_{[1]} \underbrace{\delta(z-z_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \tag{15}$$

Man sieht: Ohne den Faktor $\frac{1}{r}$ ginge es sich einheitenmäßig einfach nicht aus!

Betrachten wir nun das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ in Zylinderkoordinaten:

$$Q_{ges} = \iiint \rho\, r dr d\varphi dz = \underbrace{q_0}_{\substack{Gesamt- \\ ladung}} \underbrace{\int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r} \delta(r-r_0)\, \delta(\varphi-\varphi_0)\, \delta(z-z_0)\, r dr\, d\varphi\, dz}_{Punkt\ (einheitenlos)} \tag{16}$$

Man sieht, dass die in einem Punkt konzentrierte Ladung richtig aufintegriert wird.

2.2 Linienladung

2.2.1 Linienladung parallel zur z-Achse bei $r_0 \neq 0$

Betrachten wir nun einen unendlich dünnen, homogen geladenen Draht mit der Linienladungsdichte τ_0 parallel zur z-Achse mit eine Ausdehnung in z-Richtung von $z = -L$ bis $z = +L$. Die Position in xy–Richtung wird in Zylinderkoordinaten über r_0 und φ_0 dargestellt, wobei gelten soll: $r_0 \neq 0$.

Die Raumladungsdichte kann in diesem Fall wie folgt dargestellt werden:

$$\rho(r,\varphi,z) = \tau_0 \frac{1}{r} \delta(r-r_0)\, \delta(\varphi-\varphi_0)\, \theta(L+z)\, \theta(L-z) \tag{17}$$

Ein Einheitenvergleich bestätigt die Plausibilität:

$$\underbrace{\rho(r,\varphi,z)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{\tau_0}_{\left[\frac{C}{m}\right]} \underbrace{\frac{1}{r}}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \underbrace{\delta(r-r_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \underbrace{\delta(\varphi-\varphi_0)}_{[1]} \underbrace{\theta(L+z)\, \theta(L-z)}_{[1]} \tag{18}$$

Das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ sieht so aus:

$$Q_{ges} = \tau_0 \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r} \delta(r-r_0)\, \delta(\varphi-\varphi_0)\, \theta(L+z)\, \theta(L-z)\, dr\, r d\varphi\, dz \tag{19}$$

Nach Auswerten von $\theta(L+z)\, \theta(L-z)$ erhält man:

$$Q_{ges} = \underbrace{\tau_0}_{\substack{Ladung \\ pro \\ Länge}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r} \delta(r-r_0)\, \delta(\varphi-\varphi_0)\, dr\, r d\varphi}_{fixiert\ senkrechten\ Draht\ in\ xy-Richtung} \underbrace{\int_{z=-L}^{L} dz}_{\substack{Länge\ in \\ z-Richtung}} = \tau_0 \cdot 2L \tag{20}$$

Es wird im Endeffekt, wie erwartet, die Linienladungsdichte mit einer Länge multipliziert.

2.2.2 Linienladung entlang der z-Achse bei $r_0 = 0$

Nehmen wir nun an, dass der unendlich dünne, homogen geladene Draht mit der Linienladungsdichte τ_0 genau entlang der z-Achse von $z = -L$ bis $z = +L$ verläuft. Was ist der Unterschied zu vorhin? Der Unterschied ist, dass nun kein eindeutiger Winkel φ_0 mehr angegeben werden kann. Die Angabe $r_0 = 0$ beinhaltet bereits die ganze Information über die Lage des Drahtes in xy-Richtung; ein allfälliger Winkel φ_0 liefert keine zusätzliche Information mehr.

Wir können hier als Ausweg einen beliebigen Winkel φ_0 annehmen (z.B. $\varphi_0 = 0$). Dann funktioniert Formel (17) weiterhin. Allerdings ist bei komplexeren Integranden genau zu prüfen, ob die Fixierung auf einen Winkel eine Einschränkung darstellt, die nicht der zu berechnenden Situation entspricht. Zudem scheint es natürlicher, über den gesamten Winkelbereich von $\varphi = 0$ bis 2π zu integrieren. Daher wird in so einer Situation in der Physik die Raumladungsdichte oft so dargestellt:

$$\rho(r,\varphi,z) = \tau_0 \frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\delta(r)\,\theta(L+z)\,\theta(L-z) \tag{21}$$

Obwohl die Faustregel lautet, dass der Faktor $\frac{1}{r}$ bei Zylinderkoordinaten nur benötigt wird, wenn eine Deltadistribution mit φ im Argument vorkommt, haben wir hier eine Ausnahme von der Regel. Wir lassen $\delta(\varphi)$ zwar weg, dies *aber nur wegen der Unvollkommenheit der Zylinderkoordinaten bei* $r_0 = 0$. Eigentlich schreiben wir ja im Allgemeinen (wenn $r_0 \neq 0$) ein $\delta(\varphi - \varphi_0)$, und nur bei $r_0 = 0$ hat dies eben ausnahmsweise keinen Sinn.

Der zusätzliche Faktor 2π wird klar, wenn man sich das folgende Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ ansieht:

$$Q_{ges} = \tau_0 \int_{z=-\infty}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi r}\delta(r)\,\theta(L+z)\,\theta(L-z)\,dr\,r d\varphi\,dz \tag{22}$$

Nach Kürzen von r mit $\frac{1}{r}$ (in Formel (22) rot dargestellt) und Auswerten von $\theta(L+z)\,\theta(L-z)$ sieht das Integral wie folgt aus:

$$Q_{ges} = \tau_0 \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{r=0}^{\infty}\delta(r)\,dr}_{=1} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \underbrace{\int_{z=-L}^{L} dz}_{\substack{Länge\ in\\ z-Richtung}} = \tau_0 \cdot 2L \tag{23}$$

Der zusätzliche Faktor $\frac{1}{2\pi}$ stammt also nicht aus einer Funktionaldeterminante, sondern wird benötigt um das „übrigbleibende" Integral von $\varphi = 0$ bis 2π zu kompensieren.

Kritisch anzumerken bei dieser Darstellung ist, dass $\int_{r=0}^{\infty}\delta(r)\,dr$ gemäß Standarddefinition der Deltadistribution streng genommen nicht eins ergibt, da der „kritische" Punkt $r = 0$ gleichzeitig eine Integralgrenze ist. Als Physiker weiß man hier einfach, was gemeint ist; beim Berechnen mit Wolfram Mathematica käme aber z.B. null heraus.

2.3 Flächenladung einer Zylindermantelfläche

Gegeben sei ein Zylinder mit Radius r_0, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfalle, und der sich in z-Richtung von $-L$ bis L erstreckt. Die Oberfläche dieses Zylinders trage eine homogene Oberflächenladungsdichte σ_0. Die Raumladungsdichte in Zylinderkoordinaten stellt sich dann wie folgt dar:

$$\rho(r,\varphi,z) = \sigma_0\,\delta(r - r_0)\,\theta(L+z)\,\theta(L-z) \tag{24}$$

Entgegen der ersten Intuition wird hier also kein Faktor $\frac{1}{r}$ in der Raumladungsdichte benötigt. Warum ist das so? Dies ist so, weil wir Formel (24) keine Deltadistribution mit φ im Argument beinhaltet.

Kontrollieren wir Formel (24) mit einem Einheitenvergleich auf Plausibilität:

$$\underbrace{\rho(r,\varphi,z)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{\sigma_0}_{\left[\frac{C}{m^2}\right]} \underbrace{\delta(r-r_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \underbrace{\theta(L+z)\,\theta(L-z)}_{[1]} \tag{25}$$

Der Einheitenvergleich liefert also eine weitere Bestätigung. Der tiefere Grund für den Wegfall von $\frac{1}{r}$ wird außerdem klar, wenn man das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ betrachtet:

$$Q_{ges} = \sigma_0 \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \delta(r-r_0)\,\theta(L+z)\,\theta(L-z)\,dr\,r d\varphi\,dz \tag{26}$$

Nach Auswerten von $\theta(L+z)\,\theta(L-z)$ erhält man:

$$Q_{ges} = \underbrace{\sigma_0}_{\substack{Ladung\\ pro\\ Fläche}} \underbrace{\int_{r=0}^{\infty} \delta(r-r_0)\,dr}_{fixier\ Radius\ r_0} \underbrace{\int_{z=-L}^{L} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r d\varphi\,dz}_{Zylindermantelfläche} = \sigma_0 \cdot 2\pi r_0 \cdot 2L \tag{27}$$

Man erkennt: Die Deltadistribution $\delta(r-r_0)$ fixiert den Radius auf r_0, und das Restintegral $r d\varphi dz$ liefert genau die Zylindermantelfläche $2\pi r_0 \cdot 2L$, mit der die Flächenladungsdichte multipliziert werden muss. Das r darf hier also nicht weggekürt werden.

3 Kugelkoordinaten

3.1 Punktladung

Betrachten wir nun wiederum eine Punktladung q_0 am Koordinatenpunkt $(r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, der diesmal in Kugelkoordinaten festgelegt ist. In der Formel für die Raumladungsdichte taucht, wie zu erwarten, die reziproke Funktionaldeterminate für Kugelkoordinaten $\frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}$ auf:

$$\rho(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2\sin(\vartheta)}\,q_0\,\delta(r-r_0)\,\delta(\vartheta-\vartheta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0) \tag{28}$$

Anschauliche Erklärung

Die Begründung ist analog zu den Zylinderkoordinaten:

- Ein kleines Winkelinkrement $d\varphi$ repräsentiert eine umso größere intefesimale Strecke entlang eines Breitenkreises, je größer der Wert von $r\sin(\vartheta)$ ist.
- Ein kleines Winkelinkrement $d\vartheta$ repräsentiert eine umso größere intefesimale Strecke entlang eines Längenkreises, je größer der Wert von r ist.
- Beides zusammen ergibt die bekannte Funktionaldeterminante $r^2\sin(\vartheta)$.
- Die Deltafunktionen, die auf die Winkel ϑ und φ wirken, „picken“ nur einen Winkel heraus, die entsprechenden Längen müssen immer noch korrigiert werden, damit (schlampig gesprochen) der von der Deltadistribution „herausgepickte Punkt“ auch wirklich ein Punkt bleibt.

Es ist Verständnis fördernd, die reziproke Funktionaldeterminante beim Anschreiben der Raumladungsdichte wie folgt aufzuspalten:

$$\rho(r,\vartheta,\varphi) = q_0\,\delta(r-r_0)\,\frac{1}{r}\delta(\vartheta-\vartheta_0)\,\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\delta(\varphi-\varphi_0) \tag{29}$$

Das $\frac{1}{r}$ gehört zum $\delta(\vartheta-\vartheta_0)$, und das $\frac{1}{r\sin(\vartheta)}$ zum $\delta(\varphi-\varphi_0)$.

Einheitenvergleich

Der Einheitenvergleich bestätigt die Schlüssigkeit der Darstellung:

$$\underbrace{\rho(r,\vartheta,\varphi)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{q_0}_{[C]}\,\underbrace{\delta(r-r_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\,\underbrace{\frac{1}{r}}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\,\underbrace{\delta(\vartheta-\vartheta_0)}_{[1]}\,\underbrace{\frac{1}{r\sin(\vartheta)}}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\,\underbrace{\delta(\varphi-\varphi_0)}_{[1]} \tag{30}$$

Hier das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten:

$$Q_{ges} = \underbrace{q_0}_{\substack{Gesamt-\\ladung}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} \delta(r-r_0)\frac{1}{r}\delta(\vartheta-\vartheta_0)\frac{1}{r\sin(\vartheta)}\delta(\varphi-\varphi_0)\,r^2\sin(\vartheta)\,dr\,d\vartheta\,d\varphi}_{Punkt\ (einheitenlos)} \tag{31}$$

3.2 Linienladung entlang eines Teils eine Breitenkreises

Gegeben sei eine homogene Linienladung mit der Linienladungsdichte τ_0 entlang des Breitenkreises einer Kugel im Ursprung. Die Kugel habe den Radius r_0, und der Breitenkreis wird über den Winkel ϑ_0 festgelegt. Die Linienladung erstreckt sich von $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bis $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Die Raumladungsdichte lässt sich wie folgt darstellen:

$$\rho(r,\vartheta,\varphi) = \tau_0\,\delta(r-r_0)\frac{1}{r}\delta(\vartheta-\vartheta_0)\,\theta\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\theta\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right) \tag{32}$$

Im Gegensatz zur Raumladungsdichte für die Punktladung wird hier nur mehr der Radius r_0 und der Winkel ϑ_0 fixiert. Über den Winkel φ wird das eigentliche Linienintegral in den über die Heavisidefunktion vorgegebenen Grenzen gebildet. Da es in Formel (32) keine Deltadistribution mit φ im Argument gibt, fehlt auch der zugehörige Anteil der reziproken Funktionaldeterminante $\frac{1}{r\sin(\vartheta)}$.

Hier die Einheitenüberprüfung:

$$\underbrace{\rho(r,\vartheta,\varphi)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{\tau_0}_{\left[\frac{C}{m}\right]}\,\underbrace{\delta(r-r_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\,\underbrace{\frac{1}{r}}_{\left[\frac{1}{m}\right]}\,\underbrace{\delta(\vartheta-\vartheta_0)}_{1}\,\underbrace{\theta\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\theta\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)}_{1} \tag{33}$$

Das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$ stellt sich wie folgt dar:

$$Q_{ges} = \tau_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} \delta(r-r_0)\frac{1}{r}\delta(\vartheta-\vartheta_0)\,\theta\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\theta\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)r^2\sin(\vartheta)\,dr\,d\vartheta\,d\varphi \tag{34}$$

Nach Auswertung von $\theta\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\theta\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$ ergibt sich:

$$Q_{ges} = \tau_0 \int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2}\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} \delta(r-r_0)\frac{1}{r}\delta(\vartheta-\vartheta_0)\,r^2\sin(\vartheta)\,dr\,d\vartheta\,d\varphi \tag{35}$$

Nach Kürzen von $\frac{1}{r}$ mit r^2 und Auswertung der Deltadistributionen bekommt man schließlich:

$$Q_{ges} = \underbrace{\tau_0}_{\substack{Ladung\\pro\\Länge}} \underbrace{\int_{\varphi=\pi/2}^{3\pi/2} r_0\sin(\vartheta_0)\,d\varphi}_{Strecke\ am\ Breitenkreis} = r_0\cdot\pi\sin(\vartheta) \tag{36}$$

3.3 Oberflächenladung an einer Kugeloberfläche

Gegeben sei eine Kugel im Ursprung mit Radius r_0. Die Oberfläche dieser Kugel trage eine homogene Oberflächenladungsdichte σ_0.

Die Raumladungsdichte in Kugelkoordinaten stellt sich dann wie folgt dar:

$$\rho(r,\vartheta,\varphi) = \sigma_0\, \delta(r - r_0) \tag{37}$$

Da Formel (37) weder eine Deltadistributionen mit ϑ, noch eine mit φ im Argument beinhaltet, fallen auch beide Anteile der reziproken Funktionaldeterminante weg. Weil in diesem Beispiel die gesamte Kugeloberfläche geladen ist, müssen die Integrationsgrenzen für ϑ und φ nicht explizit mit Heavisidefunktionen festgelegt werden.

Der Einheitenvergleich ist simpel:

$$\underbrace{\rho(r,\vartheta,\varphi)}_{\left[\frac{C}{m^3}\right]} = \underbrace{\sigma_0}_{\left[\frac{C}{m^2}\right]} \underbrace{\delta(r - r_0)}_{\left[\frac{1}{m}\right]} \tag{38}$$

Dies ist das Integral über den gesamten $\mathbb{R}^3$:

$$Q_{ges} = \sigma_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{\infty} \delta(r - r_0)\, r^2 \sin(\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \tag{39}$$

Nach Auswertung von $\delta(r - r_0)$ bleibt:

$$Q_{ges} = \underbrace{\sigma_0}_{\substack{Ladung\\pro\\Fläche}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} r_0{}^2 \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi}_{Kugeloberfläche} = \sigma_0 \cdot 4\pi r_0^2 \tag{40}$$

4 Zusammenfassung

- Deltadistributionen reduzieren die Dimension des Volumsintegrals. Mit ein, zwei oder drei Deltadistributionen im Integranden entsteht ein Flächen- oder Linienintegral; oder überhaupt ein „einheitenloses“ Integral.
- Die Deltadistribution liefert die reziproke Einheit des Arguments zurück; die Heavisidefunktion ist einheitenlos. Mit diesem Wissen kann eine Raumladungsdichteformel mittels Einheitenvergleich auf Plausibilität überprüft werden.
- In Zylinderkoordinaten muss der Raumladungsdichte i.A. eine reziproke Funktionaldeterminante $\frac{1}{r}$ hinzugefügt werden, aber nur wenn in der Formel für die Raumladungsdichte eine Deltadistribution mit φ im Argument vorkommt.
- Eine Ausnahme ist die Darstellung einer Linienladung entlang der z-Achse in Zylinderkoordinaten. Fixiert man hier nicht (willkürlich) einen Winkel φ_0 mittels Deltadistribution, so muss dem Ausdruck für die Raumladungsdichte der Faktor $\frac{1}{2\pi r}$ hinzugefügt werden.
- In Kugelkoordinaten muss immer, wenn in der Formel für die Raumladungsdichte eine Deltadistribution mit einem φ im Argument vorkommt, der reziproke Funktionaldeterminantenanteil $\frac{1}{r\sin(\vartheta)}$ hinzugefügt werden.
- In Kugelkoordinaten muss immer, wenn in der Formel für die Raumladungsdichte eine Deltadistribution mit einem ϑ im Argument vorkommt, der reziproke Funktionaldeterminantenanteil $\frac{1}{r}$ hinzugefügt werden.