Lösung Beispiel 7, Helmut Hörner, Mat.Nr. 08850092

Zusammenhang x1, x2, x3, ϑ und y1, y2, y3, ϑ

In[1]:=
```
x2[t_] := x1[t] + l1 Cos[ϑ[t]];
y2[t_] := y1[t] + l1 Sin[ϑ[t]];
x3[t_] := x1[t] + (l1 + l2) Cos[ϑ[t]];
y3[t_] := y1[t] + (l1 + l2) Sin[ϑ[t]];
```
(Kosinus, Sinus, Kosinus, Sinus)

Definition Schwerpunkt

In[5]:=
$$xs[t\_] = \frac{m1\, x1[t] + m2\, x2[t] + m3\, x3[t]}{m1 + m2 + m3};$$
$$ys[t\_] = \frac{m1\, y1[t] + m2\, y2[t] + m3\, y3[t]}{m1 + m2 + m3};$$

Konkrete Werte

In[7]:=
```
werte = {m1 → 5, m2 → 3, m3 → 8, l1 → 0.25, l2 → 0.75};
```

a) (i) Lage des Schwerpunkts zur Zeit t=0, allgemein

In[8]:=
```
{xs[0], ys[0]} // FullSimplify
```
(vereinfache vollständig)

Out[8]=
$$\left\{\frac{(l2\, m3 + l1\,(m2 + m3))\, Cos[ϑ[0]]}{m1 + m2 + m3} + x1[0],\ \frac{(l2\, m3 + l1\,(m2 + m3))\, Sin[ϑ[0]]}{m1 + m2 + m3} + y1[0]\right\}$$

a) (ii) Lage des Schwerpunkts zur Zeit t=0, für x1[0]=1,y1[0]=1,ϑ[0]=π/4

In[9]:=
$$\{xs[0], ys[0]\} \text{ /. } \left\{x1[0] \to 1,\ y1[0] \to 1,\ ϑ[0] \to \frac{\pi}{4}\right\} \text{ /. werte // FullSimplify}$$
(vereinfache vollständig)

Out[9]=
```
{1.3867, 1.3867}
```

b) Aufstellen der Euler Lagrange Funktion und DGL
- Berechne kinetische und potentielle Energie

In[10]:=
$$T = \frac{1}{2} m1 \left(x1'[t]^2 + y1'[t]^2\right) + \frac{1}{2} m2 \left(x2'[t]^2 + y2'[t]^2\right) + \frac{1}{2} m3 \left(x3'[t]^2 + y3'[t]^2\right);$$
$$U = m1\, g\, y1[t] + m2\, g\, y2[t] + m3\, g\, y3[t];$$

- Euler Lagrange Funktion

In[12]:=
```
L = T - U // FullSimplify
```

Out[12]=
$$\frac{1}{2}\left(-2\,g\,(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,\mathrm{Sin}[\vartheta[t]]-2\,g\,(m1+m2+m3)\,y1[t]+(m1+m2+m3)\,(x1'[t]^2+y1'[t]^2)-2\,(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,(\mathrm{Sin}[\vartheta[t]]\,x1'[t]-\mathrm{Cos}[\vartheta[t]]\,y1'[t])\,\vartheta'[t]+(l1^2\,m2+(l1+l2)^2\,m3)\,\vartheta'[t]^2\right)$$

- Definiere Anfangsbedingungen

In[13]:=
```
ab = {x1[0] == 1, x1'[0] == 2.5, y1[0] == 1, y1'[0] == -0.5, ϑ[0] == π/4, ϑ'[0] == 2.3};
```

- Differentialgleichungen

In[14]:=
```
DGL1 = D[D[L, x1'[t]], t] - D[L, x1[t]] == 0 // FullSimplify
DGL2 = D[D[L, y1'[t]], t] - D[L, y1[t]] == 0 // FullSimplify
DGL3 = D[D[L, ϑ'[t]], t] - D[L, ϑ[t]] == 0 // FullSimplify
```

Out[14]=
$$(m1+m2+m3)\,x1''[t]==(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,(\mathrm{Cos}[\vartheta[t]]\,\vartheta'[t]^2+\mathrm{Sin}[\vartheta[t]]\,\vartheta''[t])$$

Out[15]=
$$(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,\mathrm{Sin}[\vartheta[t]]\,\vartheta'[t]^2==(m1+m2+m3)\,(g+y1''[t])+(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,\mathrm{Cos}[\vartheta[t]]\,\vartheta''[t]$$

Out[16]=
$$(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,(-\mathrm{Sin}[\vartheta[t]]\,x1''[t]+\mathrm{Cos}[\vartheta[t]]\,(g+y1''[t]))+(l1^2\,m2+(l1+l2)^2\,m3)\,\vartheta''[t]==0$$

- Lösung der DGL (Werte eingesetzt, aber g noch allgemein)

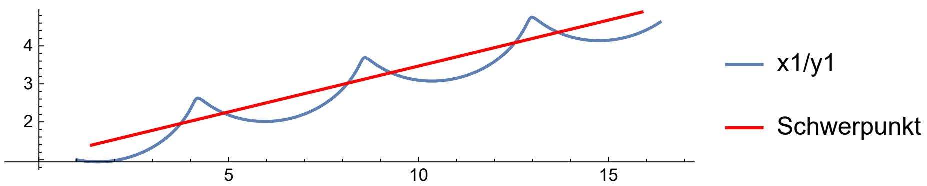
In[17]:=
```
solution =
  Flatten[Quiet[DSolve[{DGL1, DGL2, DGL3, ab} /. werte, {x1[t], y1[t], ϑ[t]}, t]]]
```

Out[17]=
$$\{\vartheta[t]\to 0.785398+2.3\,t,$$
$$x1[t]\to 1.3867+1.61059\,t-0.386699\,\mathrm{Cos}[2.3\,t]+0.386699\,\mathrm{Sin}[2.3\,t],$$
$$y1[t]\to 1.3867+0.389408\,t-0.5\,g\,t^2-0.386699\,\mathrm{Cos}[2.3\,t]-0.386699\,\mathrm{Sin}[2.3\,t]\}$$

- Bahn von x1, y1 und Schwerpunkt, ohne Schwerkraft

In[18]:=
```
Show[
 ParametricPlot[{{x1[t], y1[t]} /. solution /. werte /. g → 0 },
  {t, 0, 9}, PlotLegends → {"x1/y1", "Schwerpunkt"}],
 ParametricPlot[{xs[t], ys[t]} /. solution /. werte /. g → 0, {t, 0, 9},
  PlotStyle → RGBColor[250, 0, 0], PlotLegends → {"Schwerpunkt"}]
]
```
zeige an · parametrische Darstellung · Legenden der Graphik · parametrische Darstellung · RGB Farbe · Legenden der Graphik

Out[18]=



- Bahn des Schwerpunkts bei g=0 ist eine Gerade:

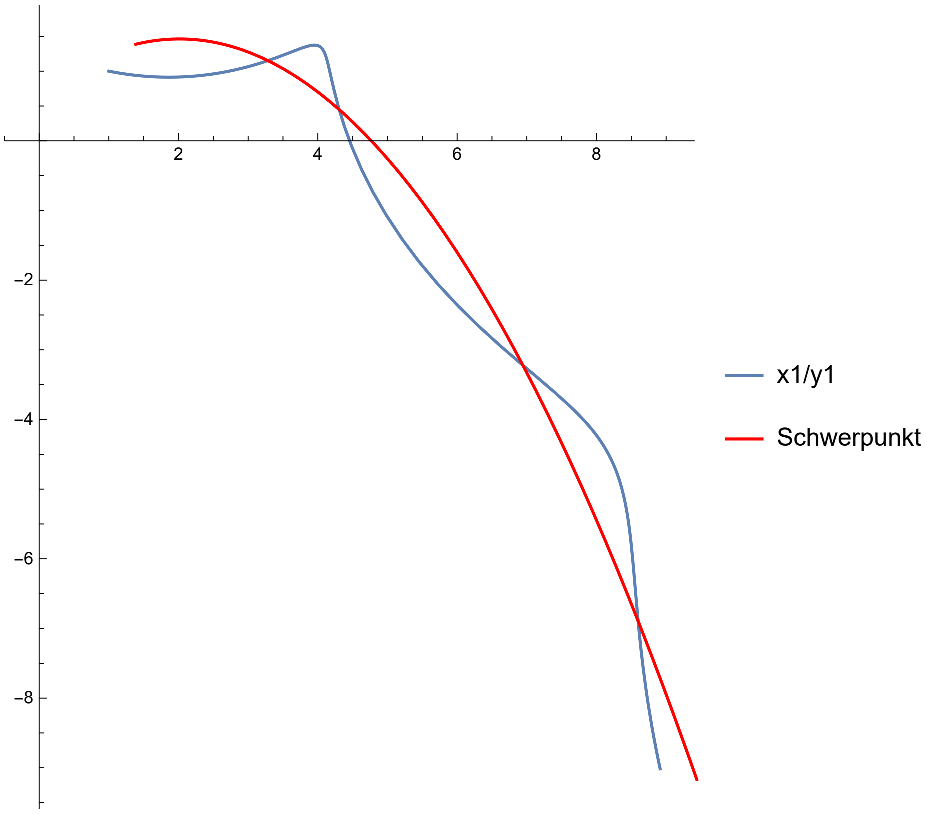
In[19]:=
```
{xs[t], ys[t]} /. solution /. werte /. g → 0 // FullSimplify
```
vereinfache vollständig

Out[19]= {1.3867 + 1.61059 t, 1.3867 + 0.389408 t}

- Bahn von x1, y1 und Schwerpunkt mit Schwerkraft (g=1)

In[20]:=
```
Show[
zeige an
 ParametricPlot[{{x1[t], y1[t]} /. solution /. werte /. g → 1},
 parametrische Darstellung
  {t, 0, 5}, PlotLegends → {"x1/y1", "Schwerpunkt"}],
             Legenden der Graphik
 ParametricPlot[{xs[t], ys[t]} /. solution /. werte /. g → 1, {t, 0, 5},
 parametrische Darstellung
  PlotStyle → RGBColor[250, 0, 0], PlotLegends → {"Schwerpunkt"}]
  Darstellungsstil RGB Farbe             Legenden der Graphik
]
```

Out[20]=



- Animation der 3 Massenpunkte und des Schwerpunkts bei g=1

In[21]:=
```
Animate[
 Graphics[
  {Disk[{x1[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt,
     y1[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt}, 0.25],
   Disk[{x2[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt,
     y2[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt}, 0.25],
   Disk[{x3[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt,
     y3[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt}, 0.25],
   Red, Disk[{xs[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt,
     ys[t] /. solution /. werte /. g → 1 /. t → tt}, 0.25]},
  PlotRange → {{0, 13}, {-12, 2}}],
 {tt, 0, 7}, AnimationRate → 3, AnimationRunning → False]
```

animiere; Graphik; Kreisscheibe; Kreisscheibe; Kreisscheibe; Kreisscheibe; Koordinatenbereich der Graphik; Animationsgeschwindi···; Animationsausführung; falsch tt

Out[21]=

d) Ermittle Anfangsbedingungen, so dass Schwerpunkt ruht

- Geschwindigkeit des Schwerpunkts

In[22]:=
```
vxs[t_] = FullSimplify[D[xs[t], t] ]
          vereinfache voll··· leite ab
vys[t_] = FullSimplify[D[ys[t], t]]
          vereinfache voll··· leite ab
```

Out[22]= $$x1'[t]-\frac{(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,\mathrm{Sin}[\vartheta[t]]\,\vartheta'[t]}{m1+m2+m3}$$

Out[23]= $$y1'[t]+\frac{(l2\,m3+l1\,(m2+m3))\,\mathrm{Cos}[\vartheta[t]]\,\vartheta'[t]}{m1+m2+m3}$$

- Ermittle AB, so dass Geschwindigkeit des SP bei t=0 Null ist (ϑ[0] und ϑ'[0] unverändert)

```
In[24]:= ab2 =
  Flatten[Solve[{vxs[0] == 0, vys[0] == 0}, {x1′[0], y1′[0]}]] /. werte /. ϑ[0] → π/4 /.
   ϑ'[0] → 2.3 // FullSimplify

Out[24]= {x1′[0] → 0.889408, y1′[0] → -0.889408}
```

- Alle anderen Anfangsbed. unverändert

```
In[25]:= ab0 = {x1'[0] == ab2[[1, 2]], y1'[0] == ab2[[2, 2]],
   x1[0] == 1, y1[0] == 1, ϑ[0] == π/4, ϑ'[0] == 2.3}

Out[25]= {x1′[0] == 0.889408, y1′[0] == -0.889408, x1[0] == 1, y1[0] == 1, ϑ[0] == π/4, ϑ′[0] == 2.3}
```

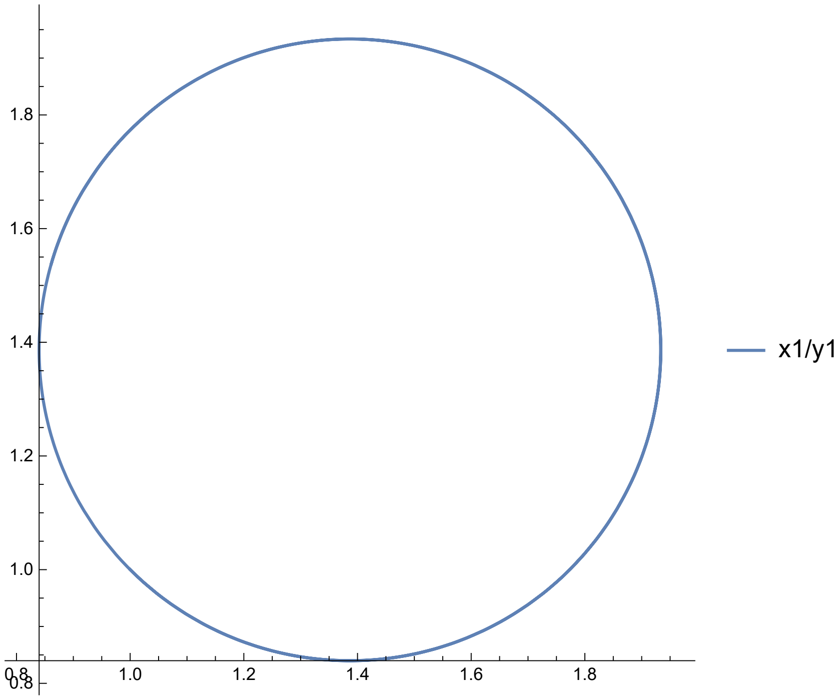
- Lösung der DGL, so dass Schwerpunkt ruhend

In[26]:=
```
solution0 =
 Flatten[Quiet[DSolve[{DGL1, DGL2, DGL3, ab0} /. werte, {x1[t], y1[t], ϑ[t]}, t]]]
```
ebne ein unter··· löse Differentialgleichung

```
ParametricPlot[{{x1[t], y1[t]} /. solution0 /. werte /. g → 0},
 {t, 0, 5}, PlotLegends → {"x1/y1", "Schwerpunkt"}]
```
parametrische Darstellung

Legenden der Graphik

Out[26]= $\{\vartheta[t] \to 0.785398 + 2.3\,t,\ x1[t] \to 1.3867 - 0.386699\,\mathrm{Cos}[2.3\,t] + 0.386699\,\mathrm{Sin}[2.3\,t],\ y1[t] \to 1.3867 - 0.5\,g\,t^2 - 0.386699\,\mathrm{Cos}[2.3\,t] - 0.386699\,\mathrm{Sin}[2.3\,t]\}$

Out[27]=


- Animation mit ruhendem Schwerpunkt bei g=0

In[28]:=
```
Animate[
 Graphics[
  {Disk[{x1[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt,
     y1[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt}, 0.25],
   Disk[{x2[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt,
     y2[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt}, 0.25],
   Disk[{x3[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt,
     y3[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt}, 0.25],
   Red, Disk[{xs[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt,
     ys[t] /. solution0 /. werte /. g → 0 /. t → tt}, 0.25]},
  PlotRange → {{-2, 4}, {-2, 4}}],
 {tt, 0, 8}, AnimationRate → 3, AnimationRunning → False]
```

animiere | Graphik | Kreisscheibe | Kreisscheibe | Kreisscheibe | Kreisscheibe | Koordinatenbereich der Graphik | Animationsgeschwindi··· | Animationsausführung | falsch

Out[28]=