Physik I

Stand 04.08.2021

Koordinatensysteme

Kugel	$\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{pmatrix}; det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right) = r^2\sin\vartheta$	Zylinder	$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}; \ det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)}\right) = r; \ \left\lvert\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{r^2+z^2}$

Kinematik

Linear:	$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \ \vec{s} = \int \vec{v}\,dt = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2}t^2$	Kreis:	$\vec{\omega} = \int \dot{\vec{\omega}}\,dt = \vec{\omega}_0 + \dot{\vec{\omega}}t; \ \vec{\varphi} = \int \vec{\omega}\,dt = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\dot{\vec{\omega}}}{2}t^2$
Kreis→Lin.	$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f; \ s = r\varphi; \ \vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix}; \ \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ +r\omega\cos\omega t \end{pmatrix}; \ \vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$	Frequenz:	$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$
Allg. Bew.	$\vec{a} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + v\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_n = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$		
Rot. Syst:	$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{s}$ | $\vec{a}' = \vec{a} + 2\vec{v}'\times\vec{\omega} + \vec{\omega}\times(\vec{s}\times\vec{\omega}) = \vec{a} + Coriolis + Zentrifugal$	Zentriptalbeschleunigung:	$\vec{a}_z = -r\omega^2\vec{e}_r$

Newton

Axiom 1:	$\vec{p} = m\vec{v};$	Axiom 2:	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$	Axiom 3:	$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$		$\Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const.$
Gravitation	$\vec{F}_G = m\vec{g} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r$	Feldstärke:	$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m} = \vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r$	Potential	$\phi = -\int \vec{g}(\vec{r})\,d\vec{r} = -\frac{GM}{r}; \vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\phi$		
Impuls:	$\vec{p} = m\vec{v}; \ \left[\frac{kg\,m}{s}\right]$	Dreh-impuls:	$\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}) = m(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})) = m\,(\vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\cancel{\vec{r}\cdot\vec{\omega}})) = mr^2\vec{\omega}; \ \left[\frac{kg\,m^2}{s}\right]$				
Kraft:	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \vec{v}\frac{dm}{dt}; \ \left[\frac{kg\,m}{s^2}\right], [N]$	Dreh-moment	$\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}; \ [Nm] = \left[\frac{kg\,m^2}{s^2}\right]$				
Arbeit:	$W = \int \vec{F}d\vec{s} = \int P\,dt; \ [J] = [Nm] = [Ws] = \left[\frac{kg\,m^2}{s^2}\right]$	Arbeit:	$W = \int \vec{D}\,d\varphi$				
Energie:	$E_{pot}^{grav} = mgh; \ E_{pot}^{grav} = \phi m = -\frac{GmM}{r};$ $E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \Longrightarrow \frac{\partial E_{kin}}{\partial p} = \frac{p}{m} = v$	Energie:	$E_{rot} = \frac{1}{2}\int v(\vec{r}_\perp)^2\,dm = \frac{1}{2}\omega^2\int r_\perp^2 dm = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2 I}{2I} = \frac{L^2}{2I}$				
Leistung:	$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\int\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}; \ [W] = \left[\frac{J}{s}\right] = \left[\frac{kg\,m^2}{s^3}\right]$	Leistung:	$P = \vec{D}\cdot\vec{\omega}$				
Planeten-bahn:	$E_{pot} = -\frac{GMm}{r} \ldots (1); E_{kin} = \frac{m\vec{v}^2}{2} \ldots (2) \ \vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_t\vec{e}_t \Longrightarrow \vec{v}^2 = v_r^2 + v_t^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} E_{kin} = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_t^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \Longrightarrow$ $E_{kin} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\right) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \ldots (3) \ E = E_{pot} + E_{kin} \overset{(1),(3)}{=} -\frac{GMm}{R} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m\dot{r}^2}{2} = E_{pot}^{eff} + E_{kin}^{rad}$						

Spezielle Relativitätstheorie

Gamma:	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \ \beta = \frac{v}{c}$	Ort $\begin{matrix} x = \gamma(x' + vt') & x' = \gamma(x - vt) \\ y = y' & y' = y \\ z = z' & z' = z \end{matrix}$	Geschw. $v_x = \frac{v_x' + v}{1 + v_x'\frac{v}{c^2}}; \ v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1 + v_x'\frac{v}{c^2}\right)}; \ v_z = \frac{v_z'}{\gamma\left(1 + v_x'\frac{v}{c^2}\right)}$ $v_x' = \frac{v_x - v}{1 - v_x\frac{v}{c^2}}; \ v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - v_x\frac{v}{c^2}\right)}; \ v_z' = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - v_x\frac{v}{c^2}\right)}$
Zeitpunkt:	$t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$	Dauer: $\tau = \gamma\tau_0$ Masse: $m = \gamma m_0$ | Länge: $l = \frac{l_0}{\gamma}$	Frequenz $f_B = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \ f_R = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}; \ f_{traversal} = \frac{f_0}{\gamma}$
Impuls:	$\vec{p} = m(\vec{v})\,\vec{v} = \gamma m_0\vec{v} = const.$		$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4 = E_0^2 \ldots invariant$
Invariante	$(c\tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta s)^2$; $(\Delta s)^2$>0: zeitartig; $(\Delta s)^2$ <0: raumartig; $(\Delta s)^2$ =0: lichtartig.		
Energie:	$E = E_0 + E_{kin} = m_0c^2 + mc^2 - m_0c^2 = mc^2 = \gamma m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}; \ E_{kin} = E - E_0 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} - m_0c^2$		

Schwerpunktsystem

$\vec{r}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i$	$\vec{v}_s = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_{ges}}{M}$	$\sum p_{is} = 0$	$\vec{v}_i = \vec{v}_{is} + \vec{v}_s$ $\vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$	Reduzierte Masse:	$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$
$E_{kin} = E_{kin}^{im\,SPS} + E_{kin}^{des\,SPS} = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2 + \frac{1}{2}mv_s^2$		Dreh-impuls:	$\vec{L} = \vec{L}_S^{im\,SPS} + \vec{L}_{S0}^{des\,SPS}; \ \vec{L}_S = \sum m_i(\vec{r}_{is}\times\vec{v}_{is}) = \vec{r}_{12}\times\mu\vec{v}_{12}; \ \vec{L}_{S0} = M(\vec{r}_s\times\vec{v}_s);$		

Trägheitsmoment

$I = \int_K r^2\,dm = \rho \int_K r^2\,dV = \frac{m}{V_K}\int_K r^2\,dV\,;\ \ [kg\,m^2]$

$dV = dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta \cdot dr\,d\varphi\,d\vartheta = r \cdot dr\,d\varphi\,dz$

I zusammensetzen aus Teilstücken mit bekanntem TM *dI = f(K)dm*; Rot.-Achse „passend“: $I = \int_K \mathrm{f}(K)\,dm = \rho\int_K \mathrm{f}(K)\,dV = \frac{M}{V}\int_K \mathrm{f}(K)\,dV$

Steiner: $I' = I + mr^2$

I zusammensetzen aus Teilstücken parallel zur Rot.-Achse R mit bekanntem Trägheitsmoment *I dm* entlang einer Koordinate k⊥R: $I' = \int_k \left(\frac{I}{dm} + k^2\right) dm = \frac{M}{k_e - k_a}\int_{k_a}^{k_e}\left(\frac{I}{dm} + k^2\right) dk$

$V_{Kugel} = \int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2 \sin\vartheta\ \,dr\,d\varphi\,d\vartheta = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_{Zyl} = \int_{z=0}^{h}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r\ \,dr\,d\varphi\,dz = \pi R^2 h$

$O_{Kugel} = 4\pi R^2$

Massepunkt, Ring, Zylindermantel:	$I = mr^2$	Ring (∅-Achse), Kreisscheibe, Vollzylinder:	$I = \frac{m}{2}r^2$	Hohlzylinder:	$I = \frac{m}{2}({r_2}^2 - {r_1}^2)$	Stab (Achse durch MP)	$I = \frac{m}{12}l^2$	Stab, Achse durch Ende:	$I = \frac{m}{3}l^2$
Kugelschale	$I = \frac{2}{3}mr^2$	Kreisscheibe (∅-Achse)	$I = \frac{m}{4}r^2$	Quader (z-Achse):	$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$	Vollzylinder, Achse ⊥ Körperachse durch MM		$I = \frac{m}{4}r^2 + \frac{m}{12}l^2$	
Kugel:	$I = \frac{2}{5}mr^2$			Messung I: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_A}{D_r}}$; D_r: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D_r}}$; $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mr^2/2}{D_r}}$; $T_1^2 - T_0^2 = \frac{2\pi^2 mr^2}{D_r}$					

Rotation starrer ausgedehnter Körper

Schwerpunkt: $\vec{s} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dV$

Homogen: $\vec{s} = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}\,dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV$

Bew. eines Punktes im Körper mit $\vec{\omega}$ raumfest: $\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{v}_{is} = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$

Raumfeste Achse $\|\vec{e}_z$: $\vec{D} = (\vec{r}_\perp \times \vec{F}) = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_z + \vec{r}_\perp \times \vec{F}_t + \underbrace{\cancel{\vec{r}_\perp \times \vec{F}_n}}_{0};\ \vec{F}_z\ wird\ aufgefangen, \vec{F}_t bewirkt\ \vec{D}_\| \ zu\ Achse$

Drehimpuls: $d\vec{L} = \vec{r}_\perp \times d\vec{p} = \vec{r}_\perp \times (dm\,\vec{v}) = dm\left(\vec{r}_\perp \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp)\right) = dm\left(\vec{\omega}\,\vec{r}_\perp^{\,2} - \vec{r}_\perp(\cancel{\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega}})\right) = r_\perp^2 \vec{\omega}\,dm \Rightarrow \vec{L} = \int r_\perp^2 dm\,\vec{\omega} = I\vec{\omega}$

BWGL: $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\ddot{\vec{\varphi}}$ $\Rightarrow \ddot{\vec{\varphi}} = \frac{\vec{D}}{I};\ \ \vec{\omega} = \int \ddot{\vec{\varphi}}\,dt = \frac{\vec{D}}{I}t + \vec{\omega}_0;\ \ \vec{\varphi} = \int \vec{\omega}\,dt = \frac{\vec{D}}{2I}t^2 + \vec{\omega}_0 t + \vec{\varphi}_0$

Rollender Köper, kinetisch: $D = I\dot{\omega} \Rightarrow mg\sin(\alpha)\,r = (I_s + mr^2)\frac{a}{r} \Rightarrow a = \frac{mg\sin(\alpha)r^2}{I_s + mr^2} = \frac{mg\sin(\alpha)}{I_s/r^2 + m}$

Energie: $E_{pot} \triangleq E_{kin} + E_{rot} \Rightarrow mgs\sin(\alpha) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{I\omega^2}{mv^2}\right) = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right) \Rightarrow (v^2)' = \left(\frac{2g\sin(\alpha)}{1 + \frac{I}{mr^2}}s\right)' = av + va = 2av \Rightarrow \cdots$

Kreisel

Trägheitstensor: $d\vec{L} = dm\left(\vec{\omega}\,\vec{r}_\perp^{\,2} - \vec{r}_\perp(\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega})\right)$ (s.O.) $\Rightarrow\ \vec{L} = \int\left(\vec{\omega}\,\vec{r}_\perp^{\,2} - \vec{r}_\perp(\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega})\right) dm = \int r^2 \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} dm - \int (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} dm$

$L_x = \int r^2\omega_x\,dm - \int(x^2\omega_x + xy\omega_y + xz\omega_z)\,dm \quad = \int(r^2 - x^2)\omega_x\,dm - \int xy\omega_y\,dm - \int xz\omega_z\,dm \quad = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$

$L_y = \int r^2\omega_y\,dm - \int(xy\omega_x + y^2\omega_y + yz\omega_z)\,dm \quad = \int xy\omega_x\,dm - \int(r^2 - y^2)\omega_y\,dm - \int yz\omega_z\,dm \quad = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$

$L_z = \int r^2\omega_z\,dm - \int(xz\omega_x + xy\omega_y + z^2\omega_z)\,dm \quad = \int xz\omega_x\,dm - \int yz\omega_y\,dm - \int(r^2 - z^2)\omega_z\,dm \quad = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$

$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} = \tilde{I} \cdot \vec{\omega}$

Energie: $E_{rot} = \frac{1}{2}dm\,v^2 = \frac{1}{2}dm\,(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2}(\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2)\,dm = \frac{\vec{\omega}^2}{2}\int r^2\,dm - \frac{1}{2}\int(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2\,dm \Rightarrow$

$E_{rot} = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\int r^2\,dm - \frac{1}{2}\int(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)^2\,dm \Rightarrow$

$E_{rot} = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\int r^2\,dm - \frac{1}{2}\int(x^2\omega_x^2 + y^2\omega_y^2 + z^2\omega_z^2 + 2\omega_x\omega_y xy + 2\omega_x\omega_z xz + 2\omega_y\omega_z yz)\,dm \Rightarrow$

$E_{rot} = \frac{1}{2}\omega_x^2\int(r^2 - x^2)\,dm + \frac{1}{2}\omega_y^2\int(r^2 - y^2)\,dm + \frac{1}{2}\omega_z^2\int(r^2 - z^2)\,dm - \omega_x\omega_y\int xy\,dm - \omega_x\omega_z\int xz\,dm - \omega_y\omega_z\int yz\ \mathrm{dm} \Rightarrow$

$E_{rot} = \frac{1}{2}(\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz}) + \omega_x\omega_y I_{xy} + \omega_x\omega_z I_{xz} + \omega_y\omega_z I_{yz} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \cdot \tilde{I} \cdot \vec{\omega}$

Hauptträgheitsmomente: Diagonalisierung von $\tilde{I}$ (i.e. löse $\tilde{I} - \lambda E = 0$) $\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0\\ 0 & I_b & 0\\ 0 & 0 & I_c\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\omega_a\\ \omega_b\\ \omega_c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a\omega_a\\ I_b\omega_b\\ I_c\omega_c\end{pmatrix} = \tilde{I}^* \cdot \vec{\omega}^*$

Energie: $E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{*T} \cdot \tilde{I}^* \cdot \vec{\omega}^* = \frac{1}{2}(\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c) = \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2b} + \frac{L_c^2}{2I_c} \Rightarrow$ Rotation um Achse mit $E_{min} \triangleq$ Achse mit I_{max} (r_{max})

$I_a<I_b<I_c$. Achsen a, b, c fixiert am Kreisel. I(ω): Ellipsoid.
$I_a<I_b=I_c$ … prolat symetrisch
$I_a=I_b<I_c$ … oblat symetrisch
$I_a=I_b=I_c$ … sphärisch

Drallsatz: $\vec{D} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_K + (\vec{\omega}_K + \vec{L}_K)$

Eulergleich: $D_a = I_a\frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b)\omega_b\omega_c\,;\ D_b = I_b\frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c)\omega_c\omega_a;\ D_c = I_a\frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a)\omega_a\omega_b$

Nutation: äußeres $\vec{D} = 0 \Rightarrow\ \vec{L}$=const.; Spitze von $\vec{L}$ liegt auf Schnittpunkt von Trägheitsellipsoid und Kugel $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = const.$;

Präzession: sei $\vec{\omega} = \vec{L}$ und äußeres $\vec{D} = m\vec{g}\vec{r}$. Dann: $d\vec{L} = \vec{D}\,dt = L\,d\varphi\ \Rightarrow |\vec{D}| = L\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow mgr = L\omega_p \Rightarrow \omega_p = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$

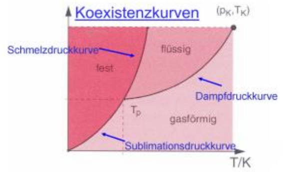
Elastische Körper

Hookesches Gesetz	$F = EA\frac{\Delta L}{L} \Leftrightarrow \frac{F}{A} = E\frac{\Delta L}{L} \Leftrightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$	$Elastizitätsmodul\ [E] = \frac{N}{m^2};\ Zugspannung\ [\sigma] = \frac{N}{m^2};\ Rel.Dehnung\ [\varepsilon] = 1$					
Biegepfeil	$s = \frac{L^3}{3EB}F$	Beiderseits eingespannt	$s_{max} = \frac{s}{16}\left(weil\ \frac{F}{2}\ auf\ 2x\ \frac{l}{2}\right)$	Deform.-arbeit	$W_{Def} = V\int_0^{\varepsilon} \sigma\, d\varepsilon = \frac{1}{2}EV\varepsilon^2$		
Flächenträgheitsmoment	$B = \iint z^2\, dy\, dz\, ; [m^4]$	Rechteck-balken:	$B = \frac{bd^3}{12}\ \ b = \Delta y,\ d = \Delta z$	Rund-Balken:	$B = \frac{\pi}{4}R^4$	Rohr:	$B = \frac{\pi}{4}(R_1^4 - R_2^4)$
Schubmodul	$G = \frac{\tau}{\alpha}\ mit\ \vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A};\ \tau\ ...Scherspannung$	Richt-moment	$D = -\frac{\pi G R^4}{2L}\varphi = -D_r\varphi$	$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}$			
Kompressionsmodul	$F = -KA\frac{\Delta V}{V} \Leftrightarrow \Delta p = -K\frac{\Delta V}{V} \Leftrightarrow K = -V\frac{\Delta p}{\Delta V} = -V\frac{dp}{dV}$	Kompressibilität:	$\kappa = \frac{1}{K}$	Poisson-zahl:	$\mu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l};\ \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon(1-2\mu)$		

Flüssigkeiten und Gase

Gasgleichung ideales Gas	$pV = Nk_BT = nRT$	$R = N_A k_B$ $N = n \cdot N_a$	Hydrost Druck	$p(z) = \rho g(H - z)$	Barom. Höhenf. $p(h) = p_0 e^{\frac{-\rho_0 g h}{p_0}}$	Auf-trieb	$\vec{F}_A = -\vec{F}_{GFl}$; Eisberg: $\rho_{Eis}V_{Eis}g = \rho_W V_{Eis}^W g$
Statischer Druck:	$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2};\ [Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{ms^2}\right]$	Gesetz v. Hagen- Poiseuille: Strömung in Rohren					$I \equiv \frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^4}{8\eta l}(p_1 - p_2);\ \left[\frac{m^3}{s}\right]$
Euler Gleichg ideale Flüss.	$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{u}}{\partial x}u_x + \frac{\partial\vec{u}}{\partial y}u_y + \frac{\partial\vec{u}}{\partial z}u_z = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}^T) \cdot \vec{u}\ ...(1)$ $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_p = m\vec{a} = \rho\Delta V\frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{F}_G + \vec{F}_p}{\rho\Delta V} = \frac{\rho\Delta V\vec{g} - \nabla p \cdot \Delta V}{\rho\Delta V} = g - \frac{\nabla p}{\rho}\ ...\ (2) \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho}}$						
Navier-Stokes	$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \nabla p + \eta\nabla^2\vec{u}$	Visko-sität:	$[\eta] = \frac{kg}{sm} = Pa \cdot s\ mit\ F_r = -\eta A\left\|\frac{du}{dy}\right\|$	Reynolds-zahl	$Re = \frac{2E_{kin}}{W_{reibung}}$		
Stromdichte (Flussdichte)	$j = \rho \cdot \vec{u} = \frac{dM}{dV}\frac{dx}{dt} = \frac{dM/dt}{A}$	Massenstrom-stärke:	$I = jA = \frac{dM}{dt} = \rho\vec{u}A = -\int_A \rho\vec{u} \cdot d\vec{A}$				
Kontinuitäts-gleichung:	$-\frac{\partial M}{\partial t} = \int_A \rho\vec{u} \cdot d\vec{A} \overset{Gauß}{\cong} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) \cdot dV\ ;\ -\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \cdot dV = -\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} \cdot dV \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{u}) = 0}$	Inkom press.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$				
Dyn. Druck (Bernoulli):	$E = E_{pot} + E_{kin} = pV + \frac{1}{2}\rho V u^2 = const. \rightarrow p + p_s = p + \frac{1}{2}\rho u^2 = const.;\ p\ ...statischer\ Druck,\ p_s\ ...Staudruck$	$u_1 A_1 = u_2 A_2$					
Stokesches Gesetz	$F_R = -6\pi\eta R \cdot \vec{u}$	$F_G + F_A = \|F_R\| \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\pi R^3\right)(\rho_K - \rho_{FL})g = 6\pi\eta R u_{end} \Rightarrow u_{end} = \frac{2R^2(\rho_K - \rho_{FL})}{9\eta}g$					

Betrachtung auf Teilchenebene

Maxwellsche Geschw. Verteilung	$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}$	Wahrsch. Geschw.	$u_w = \arg(\max(f(v))) = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$				
Mittlere Geschw.:	$\bar{v} = \int_0^{\infty} v\, f(v)\, dv = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}u_w$	Mittleres Geschw. quadrat	$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 f(v)\, dv} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$	Mittlere kinetische Energie	$\bar{E}_{kin} = \frac{f}{2}k_BT = \frac{m}{2}\overline{v^2}$		
Kalorische Zustandsgl.	$E_{kin} = \frac{1}{2}k_bT\ (pro\ Freiheitsgrad);\ E_{kin} = \frac{f}{2}k_bT\ (pro\ Teilchen) \rightarrow \bar{U} = \frac{f}{2}Nk_BT = \frac{f}{2}nRT\ (für\ N\ Teilchen\ od.\ n\ Mol)$						
Freiheitsgr. Fluide	$f = f_{trans} + f_{rot} + 2f_{vib}$	$f_{trans} = 3;\ f_{rot} = \begin{cases} 2\ (lineares\ Molekül) \\ 3\ (nicht\ lin.\ Molekül) \end{cases};\ f_{vib} = \begin{cases} 3n - 5\ (lineares\ Molekül) \\ 3n - 6\ (nicht\ lin.\ Molekül) \end{cases}$					
Freiheitsgr. Festkörper	$f = 2f_{vib} = 2(3n - 6)$			 [2]			
Mittlere Stoßzeit	$\tau \cong \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma v_{rms}};\ n = \frac{N}{V};\ \sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 = \pi d^2$	Mittlere freie Weglänge	$\Lambda \cong \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$				

Reale Gase (Van-der-Waals-Gleichung)

$\left(p + \frac{n^2 a}{V_m^2}\right)(V_m - nb) = nRT$	$a\ ...Stoffkonstante$ $b = 4N_A V_a = 4N_A\frac{4\pi}{3}r_a^3$	Krit. Temp.:	$T_k = \frac{8a}{27Rb}$	Krit. Druck	$p_k = \frac{a}{27b^2}$	Krit. Vol.	$V_k = 3b$	$\frac{p_k V_k}{RT_k} = \frac{3}{8}$	Oberh. der kritischen Temp. kann Gas nicht verflüssigt werden.
Kalorische Zustandsgleichung:	$U = E_{kin} + E_{pot} = \frac{f}{2}RT - \frac{a}{V}$	Molare Schmelzw	$\Lambda_{schm} = T\frac{dp}{dT}(V_{fl} - V_{fest})$	Boyle Temp.	$T_b = \frac{a}{bR}$	Bei T_b verh. sich Gas annähernd ideal			

[2] Abb. aus: Wolfgang Demtröder (2015): Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme. 7. Auflage. Springer, S. 215, mit Ergänzungen durch den Autor.

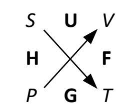
Diffusion in Gasen und Wärmeleitung

Erstes Ficksches Gesetz (Diffusion in x-Richtung)	$j_x \equiv \frac{dN}{dA\,dt}\hat{e}_A = -D\frac{dn}{dx}$; $D = \frac{\Lambda\bar{v}}{3} = \frac{1}{n\sigma}\sqrt{\frac{8kT}{9\pi m}}$	allgemein:	$\vec{j} = -D\,\text{grad}\,n$	2. Ficksches Gesetz (Diffiusionsgleichung)	$\frac{\partial\,\text{n}(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2\,\text{n}(x,t)}{\partial x^2}$
j…Teilchenstromdichte $\left[\frac{1}{m^2 s}\right]$; N… Teilchenzahl; n…Teilchenkonz. $\left[\frac{1}{m^3}\right]$; D…Diff.konstante $\left[\frac{m^2}{s}\right]$; Λ…mittl. freie Weglänge; σ…Stoßquerschnitt					

Wärmestrom:	$I = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A\frac{dT}{dx}$; $\left[\frac{J}{s}\right]$	Wärmeleit-fähigkeit	$[\lambda] = \left[\frac{W}{Km}\right]$	k-Wert	$k = \frac{\lambda}{d}$; $\left[\frac{W}{Km^2}\right]$	Wärmeübergangszahl	$\kappa \triangleq k$; $[\kappa] = \left[\frac{W}{Km^2}\right]$
Wärmewiderst. / m²	$\frac{1}{k_{ges}} = \sum\frac{1}{k_i} + \sum\frac{1}{\kappa_i}$	$\frac{\Delta T_i}{\Delta T_{ges}} = \frac{1/k_i}{1/k_{ges}} = \frac{k_{ges}}{k_i}$		Wärmestromdichte	$q = k\Delta T$; $\left[\frac{W}{m^2}\right]$		

Thermodynamik

1. HS	Jedes System besitzt eine innere Energie U (extensive Zustandsgröße). Diese kann sich nur über den Transport von mechanischer Arbeit W und Wärme Q über die Systemgrenzen ändern.				
Fundamentalgleichung 1.HS	$dU = d'Q + d'W$ $dU = d'Q - p\,dV$ $dU = TdS - p\,dV$	d': Kein totales Differential (z.B. bei konstantem Druck)	dU …*Zunahme inn. Energie* $d'Q$ …*Zugeführte Wärme* $d'W$ …*Zugeführte Arbeit*	U …*Zustandsgröße* Q …*keine Zustandsgröße* W …*keine Zustandsgröße*	Zugeführte Wärme ⇒ Erhöhung Enthalpie H=U+pV
Isochor V=const.	$d'W = 0 \Rightarrow$ $(dU)_V = d'Q = nc_v\,dT$	$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{f}{2}N_A k_B = \frac{f}{2}R$ … *spez. Molwärme*$\vert_V$		$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$	Zugeführte Wärme ⇒ Erhöhung von U≙Q∝T
isobar p=const.	$(dH)_p = d'Q = dU - d'W =$ $nc_v\,dT + p\,dV = nc_v\,dT + nR\,dT$	$c_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p = c_v + R = \frac{f}{2}R + R$		$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$	$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$ Zugeführte Wärme ⇒ Erhöhung der Enthalpie H=U+pV
isotherm T=const.	$dU = 0$ (bei i.G. dU∝dT) $d'Q = -d'W$	$\Delta W = Nk_B T\ln\frac{V_1}{V_2} = Nk_B T\ln\frac{p_2}{p_1}$		$p_1V_1 = p_2V_2$	Zugeführte Wärme ⇒ Arbeit
adiabat. d'Q=0	$d'Q = 0$ $dU = d'W$	$TV^{\kappa-1} = const.$ $pV^{\kappa} = const.$	$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$	$\Delta W_{ad} = \frac{Nk_B}{\kappa - 1}(T_2 - T_1)$	$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}$
polytrop	$pV^n = const.$; $n = 0$ … *isobar*; $n = 1$ … *isotherm*; $n \to \infty$ … *isochor*; $n = \kappa$ … *adiabat*				$\Delta Q = mc_v\frac{n-\kappa}{n-1}(T_2 - T_1)$
2. HS	$\eta = \frac{\vert\Delta W\vert}{Q_{zugef}} = 1 - \frac{T_k}{T_w} < 1$	*Energie = Exergie + Anergie* $\Delta Q_w = -\Delta W - \Delta Q_k$		Carnot-Prop.: $\frac{\Delta Q_w}{T_w} + \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$	Clausius: $\oint\frac{d'Q}{T} = 0$
3. HS Entropie	Entropie: Extensives Maß für Energie, die nicht für Arbeit verfügbar ist; für die Unordnung und die Multiplizität eines Systems.				
	$dS = \frac{d'Q_{rev}}{T}$; $\oint dS = 0$	$\Delta S = k_B\ln\frac{W_e}{W_a} \geq 0$; $S = k_B\ln W$	W … *Anzahl mögl. Zustände*; S … *Zustandsgröße*		

Fundamentalgl. („FG")	**Enthalpie H**	**Helmholtz'sche freie Energie F**	**Freie Enthalpie („Gibbs'sche freie Energie") G**	
Innere Energie = zugef. Wärme + zugef. Arbeit $dU = d'Q + d'W$ $dU = TdS - p\,dV$	$H \equiv U + pV \xrightarrow{abl.,FG\ einsetz.}$ $dH = T\,dS + p\,dV + V\,dp$ dp=0: Energ., um U um dU zu erh., wenn ein Teil der Energ. für p dV verw. wird.	$F \equiv U - TS \xrightarrow{abl.,FG\ einsetz.}$ $dF = -S\,dT - p\,dV$ Extensives thermod. Potential: $dF \leq 0$	$G \equiv H - TS$ $G \equiv U + pV - TS \xrightarrow{abl.,FG\ einsetz.}$ $dG = -S\,dT + V\,dp$ Extensives thermod. Potential: $dF \leq 0$	

Schwingungen

Freie ungedämpfte Oszillatoren			Mathematisches Pendel		Physikalisches Pendel		Torsionspendel	
Federpendel	$ma = -Dx$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_{ruhe}}}$	$ma = -mg\sin\varphi$ $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$	$I\ddot{\varphi} = -mgd\sin\varphi$ $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$	$D = -T\varphi$ $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{l}}$

Freie gedämpfte Oszillatoren			Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$	Log. Dekrement
Stokesche Reibung	$ma = -bv - Dx$ $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$; $\gamma = \frac{b}{2m}$	$\text{x}(t) = e^{-\gamma t}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t) = e^{-\gamma t}A\cos(\omega t + \varphi)$; $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$; $\varphi = -\arctan\frac{c_2}{c_1}$; $\omega = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$	$\delta = \gamma T = \ln\frac{\text{x}(t)}{\text{x}(t+T)}$ *nach* $\tau = \frac{1}{\delta}$ *ist* $A = A_0\frac{1}{e}$
Starke Dämpfung $\gamma > \omega_0$; $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$			Aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	
$\text{x}(t) = e^{-\gamma t}(c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})$; $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$			$\text{x}(t) = e^{-\gamma t}(c_1 + c_2 t)$	

Erzwungene Schwingung	$ma = -bv - Dx + F_o\cos\omega t$	Phasenverschiebung	Amplitude
$ma = -bv - Dx + F_o\cos\omega t$ $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K\cos\omega t$;	$\text{x}(t) = A_1 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2\cos(\omega t + \varphi)$ $K = F_0/m$; $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$; $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$	$\varphi = \arctan\left(-\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$	$A_2(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

Wellen

Ebene Welle in z-Richtung:	$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$	Allg Lsg:	$\xi(z,t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right)$	Longitudinal in festem Körper:	$v_{ph}^2 = \frac{E}{\rho}$	Transversal in Festkörper:	$v_{ph}^2 = \frac{G_m}{\rho}$	
Harm. Welle in z-Richtung:	$\xi(z,t) = A\sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{v}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi f z}{v}\right) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi \cancel{v} z}{\cancel{v}\lambda}\right) = \boxed{A\sin(\omega t - kz)\,; k = \frac{2\pi}{\lambda}}$	(Wellen-zahl)						
Gassäule (nur longitudinal!)	$v_{ph}^2 = \frac{K_m}{\rho} = \frac{\kappa p}{\rho};$	$K_m \ldots Komp.modul$ $\kappa \ldots \frac{c_p}{c_v} Adiabat.Idx.$	Transversal, gesp. Saite:	$v_{ph}^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\sigma}{\rho};\ \mu = \frac{m}{l}$	$\frac{p}{\rho} = \frac{pV}{nM} = \frac{nkT}{nm} = \frac{kT}{m} \Rightarrow v_{rms} = v_{ph}\sqrt{3}$			
Dispersion: $v_{ph} = f(\lambda)$	$v_{ph} = \frac{\omega}{k}; k = \frac{2\pi}{\lambda}$	Gruppen-geschw.:	$v_G = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} - \lambda\frac{dv_{ph}}{d\lambda}$					
Stehende Welle	Freies Ende: $\xi(z,t) = 2A\cos(k_n z)\cos(\omega t)$ Festes Ende: $\xi(z,t) = 2A\sin(k_n z)\sin(\omega t)$	$k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$	2x offen ∨ 2x fest: $\lambda_n = \frac{2l}{n}; f_n = n\frac{v}{2l};\ n \in \mathbb{N}_+$ 1x offen ∧ 1x fest: $\lambda_n = \frac{4l}{2n-1}; f_n = (2n-1)\frac{v}{4l};\ n \in \mathbb{N}_+$					
Doppler:	Beob. zur Quelle Sender zum Beob.	$f = f_0\frac{1+v_b/c}{1-v_s/c}$	Beob. von Quelle weg Sender von Beob. weg	$f = f_0\frac{1-v_b/c}{1+v_s/c}$	Reflektor bewegt sich zum Beob.	$f = f_0\frac{c+v}{c-v}$	vom Be-ob. weg:	$f = f_0\frac{c-v}{c+v}$

Sonstiges

Kepler:	$\frac{{T_1}^2}{{T_2}^2} = \frac{{a_1}^3}{{a_2}^3};\ \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$	Reibung:	$F_R = \mu F_N$	Wärme-ausdeh-nung	$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\Delta T;\ [\alpha] = \left[\frac{1}{K}\right]$	$V = V_0(1+\alpha\Delta T)^3$ $V \approx V_0(1+\gamma\Delta T)$ $\gamma = 3\alpha$	
$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\sin\alpha$ (0 wenn ∥)	$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\alpha$ (0 wenn ⊥)	$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$	$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$				