

# Physik II

15.08.2021

## Maxwellgleichungen

| (A) Statische Felder, in Vakuum und isotroper Materie (Vakuum: $\mu_r = 1, \epsilon_r = 1$ )  |   |  |   |  |
|---|---|--|---|--|
| Bez.  | Differenziell   | Bemerkungen  | Integral  | Bemerkungen  |
| 1) Gauß E   | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$   | Die Raumladungen sind Quellen oder Senken des E-Feldes   | $\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{ein}}{\epsilon_r \epsilon_0}$  | Gesamtfluss durch geschlossene Fläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung |
|   | $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{frei}$  | Dielektr. Verschiebung $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$   | $\oint_A \vec{D} d\vec{A} = q_{ein}$  |  |
| 2) Gauß M   | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  | Magn. Feldlinien geschlossen, es gibt keine magn. Monopole   | $\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$  | Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist Null.                 |
| 3) Stokes   | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$   | Statisches E-Feld ist wirbelfrei   | $\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0$  | Statische E-Feld ist konservatives Kraftfeld                                       |
| 4) Amp. G.  | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{j}$   | $\text{rot}(\vec{B}) =$ lokale Stromdichte   | $\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_r \mu_0 I$  | Geschlossenes Kurvenintegral von B ist proportional zum eingeschlossenen Strom     |
|   | $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$   | Magn. Feldstärke $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0}$   | $\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I$  |  |
| (B) Dynamische Felder, in Vakuum und isotroper Materie (Vakuum: $\mu_r = 1, \epsilon_r = 1$ ) |   |  |   |  |
| Bez.  | Differenziell   | Bemerkungen  | Integral  | Bemerkungen  |
| 1) Gauß   | $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_r \epsilon_0}$   | wie (A), gilt immer  | $\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{ein}}{\epsilon_r \epsilon_0}$  | wie (A), gilt immer  |
|   | $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{frei}$  | wie (A), gilt immer  | $\oint_A \vec{D} d\vec{A} = q_{ein}$  | wie (A), gilt immer  |
| 2)  | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  | wie (A), gilt immer  | $\oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$  | wie (A), gilt immer  |
| 3) Faraday  | $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  | E-Feld hat bei veränderlichem B-Feld Wirbel  | $\oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{A}$   | „Induktionsgesetz“   |
| 4) Amp. G.  | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{j} + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ | $\text{rot}(\vec{B}) =$ lokale Stromdichte   | $\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_r \mu_0 I + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \mu_r \mu_0 I + \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} d\vec{A}$ |  |
|   | $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$   |  | $\oint_C \vec{H} d\vec{s} = I + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} d\vec{A}$   |  |
| Elektr. Pot.  | $\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}'$   | Eichfreiheit: $\varphi(\vec{r}) \rightarrow \varphi'(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ | Mag. Pot.: $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  | Eichfreiheit: $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$         |
| Felder ↔ Potential:   | $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$         | Polarisation: $\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$            | Magnetisierung: $\vec{M} = \vec{H} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$   |  |

## Statisches elektrisches Feld (wirbelfreies Quellenfeld)

|                     |  |             |  |  |  |
|---------------------|--|-------------|--|--|--|
| Coulomb Gesetz:     | $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r = q\vec{E}; [q] = C = As$  | Feldstärke: | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0}; [E] = \frac{V}{m} = \frac{N}{C} = \frac{kg\ m}{As^3}$  | Punktladung:   | $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$                 |
| Kont. Raumladung    | $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_Q \frac{1}{ \vec{r}-\vec{R} ^2} \vec{e}_{rR} dQ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{r}-\vec{R}}{ \vec{r}-\vec{R} ^3} \rho(\vec{R}) dV; \rho(\vec{R}) = \frac{dQ}{dV}$   | Vollkugel:  | $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  | Hohlkugel:   | $\vec{E}_{außen}(r) = \frac{R^2 \sigma}{\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ |
| Gauß = Maxwell 1    | Fluss $\phi = \frac{q_{ein}}{\epsilon_0} = \oint_A \vec{E} d\vec{A} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \mid q_{ein} = \oint_V \rho dV \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ |             |  |  |  |
| Poisson             | $\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (-\nabla \varphi(\vec{r})) = \boxed{-\Delta \varphi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}}$   |             |  |  |  |
| Stokes = Maxwell 3  | $\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0 \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_A \vec{\nabla} \times \vec{E} d\vec{A} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0} \Rightarrow$ statisches E-Feld ist wirbelfrei   |             |  |  |  |
| Potential, Spannung | $\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}' = \frac{W_{pot}}{q}; U_{ab} = \varphi(\vec{a}) - \varphi(\vec{b}) = -\int_b^a \vec{E}(\vec{r}') d\vec{r}'; [V], \left[\frac{kg\ m^2}{As^3}\right]$  |             | Pktldg:  | $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{s})$ weil $\oint \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s} = 0$ |  |
| Vollkugel:          | $\varphi_{innen}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right); \varphi_{außen}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$   | Hohlkugel:  | $\varphi_{innen} = const; \varphi_{außen}(r) = \frac{R^2 \sigma}{\epsilon_0 r}; \varphi_{Oberfl} = const. \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \frac{\varphi}{r}$ |  |  |
| Arbeit, Energie:    | $W = -\int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{s}) d\vec{s} = -q \int_{s_1}^{s_2} \vec{E}(\vec{s}) d\vec{s} = -q \cdot (\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1)) = -qU_{21}; W_{pot} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$  |             |  | $\Delta W_{pot} = -qU_{21}$<br>$\Delta W_{kin} = -\Delta W_{pot} = qU$   |  |

## Elektrischer Dipol

|                            |                           |   |                                    |            |  |                              |                                    |
|----------------------------|---------------------------|---|------------------------------------|------------|--|------------------------------|------------------------------------|
| Dipolmoment:               | $\vec{p} = q\vec{d} [Cm]$ | Energie:  | $W_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ | Potential: | $\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ | Drehmoment im homogenen Feld | $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$ |
| Dipol im inhomogenen Feld: |                           | $\vec{F} = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}(\vec{E}) \Rightarrow F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$ |                                    |            |  |                              |                                    |

## Strom

|                |   |                   |                                     |              |  |
|----------------|---|-------------------|-------------------------------------|--------------|--|
| Strom:         | $I = \frac{dQ}{dt} = \int \vec{j} d\vec{A} = \int qn\vec{v} d\vec{A} = \lambda \vec{v} (\lambda \dots \text{Liniestromdichte})$ | Kreisstrom        | $I = Qf$                            | Stromdichte: | $\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v} = \sigma\vec{E} \left[\frac{A}{m^2}\right]$ |
| Leitfähigkeit: | $\sigma_{el} = \frac{q^2 n \tau_s}{m}$  | Spez. Widerstand: | $\rho_{el} = \frac{1}{\sigma_{el}}$ | Widerstand:  | $R = \rho_{el} \frac{L}{A} [\Omega]$   |

## Kondensatoren

|                 |  |                             |  |                              |   |  |   |   |   |                        |
|-----------------|--|-----------------------------|--|------------------------------|---|--|---|---|---|------------------------|
| Kapazität       | $C = \frac{Q}{U}$ [F]                                    | Parallel-Schaltung          | $C_{ges} = C_1 + C_2$                                | Serie:                       | $\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ ; $Q_{ges} = Q_1 = Q_2$ | Energiedichte:                                 | $w_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$                   | Energie:                                | $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$ |                        |
| Plattenkondens. | $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$ |                             | $U = Ed = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$                  | $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ | Kugulkond.  | $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_i}{r_a - r_i}$ | Zylinderkondens.  | $C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$ | Kugel:                                  | $C = 4\pi\epsilon_0 r$ |
| Dielektrikum:   | $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$                             | Dielektrische Verschiebung: | $D = \epsilon_r \epsilon_0 E_{diel} = \text{stetig}$ | Brechung:                    | $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}$ | Strom, Spannung                                | $I_C = C \frac{dU}{dt}$ ; $U_C = \frac{1}{C} \int I dt$ |   |   |                        |

## Statisches Magnetfeld (quellenfreies Wirbelfeld)

|   |   |                          |   |                                     |   |  |  |
|---|---|--------------------------|---|-------------------------------------|---|--|--|
| Kraft zweier Magnetpole                   | $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{p_1 p_2}{r^2} \vec{e}_r$                             | „Magnetische Feldstärke“ | $\vec{H}(\vec{r}) = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{p_2} \left[ \frac{A}{m} \right]$   | Mag. Flussdichte (magn. Induktion): | $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$ [T]   | Zusammenh.                             | $\epsilon_0, \mu_0, c$ : $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$  |
| Mg. Fluss Maxw. 2                         | $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{ext}$  | Gauß                     | $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ ; $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ Feldl. geschl.  | Magnetische Permeabilität:          | $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$  | Feldstärke in Materie                  | $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_r \mu_0}$  |
| Amp. Gesetz: Statisch, Vakuum (Maxwell 4) | $\mu_0 I = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s}$  | Stokes                   | $\oint_A (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow$ Rot. B = lokale Stromdichte  |                                     |   |  | $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = NI$ (gilt auch in Materie)   |
| Vektor Potential                          | $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$                                 | Coulomb-Eichung:         | $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_m(\vec{r}) = 0$   | Poisson:                            | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_m) - \Delta \vec{A}_m = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \Delta \vec{A}_m = -\mu_0 \vec{j}$ |  |  |
| Vektor Potential                          | $\vec{A}_m(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2)}{r_{12}} dV_2$ |                          | $\vec{B}(\vec{r}_1) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_m(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}_2) \times \vec{e}_{12}}{r_{12}^2} dV_2$ ; $\vec{j} \cdot d\vec{V} = \vec{j} \cdot \vec{A} d\vec{s} = I d\vec{s} \Rightarrow$ Biot-Savart |                                     |   |  | $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{Leiter} \frac{\vec{e}_{12} \times d\vec{s}_2}{r_{12}^2}$          |
| Lorentz kraft:                            | $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$   | Induktion                | $\phi = LI = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  |                                     |   | Magn. Feld einer bewegten Punktladung: | $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}$ |

## Elektromagnetische Induktion (dynamisches E- und B-Feld)

|                      |  |  |  |  |  |  |   |
|----------------------|--|--|--|--|--|--|---|
| Faradaysches Gesetz: | $U_{ind} = -N \frac{d\phi_{mag}}{dt}$  | Drehende Leiterschleife  | $U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} (BA \cos(\varphi)) = -\frac{d}{dt} BA \cos(\omega t) = BA\omega \sin(\omega t)$ |  |  |  |   |
| Maxwell 3            | $U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$  | Umschleife = $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |  |  |  |  | E-Feld hat in Anw. eines veränderlichen B-Feldes Wirbel |
| Selbstindukt.        | $U_{ind} = -N \frac{d\phi}{dt}   \phi = LI \Rightarrow U_{ind} = -L \frac{dI}{dt}$   |  |  |  |  |  |   |
| Verschiebungsstrom   | $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \Rightarrow Q = \epsilon_0 A E \Rightarrow$ Einsetzen in $I_v = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 A E) = \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow j_v = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$                                   |  |  |  |  |  |   |
| Maxwell 4            | $\mu_0 I + \mu_0 I_v = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 A \frac{\partial E}{\partial t} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$ Gesamtstrom = Leitungsstrom und Verschiebungsstrom wegen $(\partial E/\partial t) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |  |  |  |  |  | B-Felder auch aufgrund von $(\partial E/\partial t)$    |

## Leiterschleifen und Induktivitäten

|                           |   |                              |  |  |  |                   |  |
|---------------------------|---|------------------------------|--|--|--|-------------------|--|
| Feld unendl. Spule:       | $\mu_0 NI = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} \approx Bl \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{l}$ | Induktivität (unendl. Spule) | $N\Phi = LI \Rightarrow NBA = LI \Rightarrow L = \frac{NBA}{I} \Rightarrow L = \mu_r \mu_0 N^2 \frac{A}{l}$ [H] = [Ωs] |  |  |                   |  |
| Feld einer Leiterschleife | $B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + d^2)^{3/2}}$  | Helmholtz Spulenpaar         | $B = \frac{\mu_0 8IN}{\sqrt{125}R}$  | Feld in Spule (exakt):                       | $B(x) = \frac{\mu_0 I N}{2l} \left( \frac{x + \frac{l}{2}}{\sqrt{(x + \frac{l}{2})^2 + R^2}} - \frac{x - \frac{l}{2}}{\sqrt{(x - \frac{l}{2})^2 + R^2}} \right)$ |                   |  |
| Parallel:                 | $\frac{1}{L_{ges}} = \sum \frac{1}{L_n} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$                      | Serie: $L_{ges} = \sum L_n$  | Energiedichte  | $w_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}$               | Energie:   | $W = \int_V w dV$ |  |
| Strom, Spannung           | $I_L = \frac{1}{L} \int U dt$ ; $U_L = L \frac{dI}{dt}$                                   | Magnetisches Dipolmoment     | $\vec{p}_m = I \vec{A}$ [Am <sup>2</sup> ]; $\vec{A} = A \vec{e}_n$  | $\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{p}_m}{2\pi r^3}$ | $W_{pot} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}_{außen}$   |                   |  |

## Hertzscher Dipol

|                       |   |   |  |   |   |  |  |
|-----------------------|---|---|--|---|---|--|--|
| Fernfeld:             | $ E  = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{p_0 \omega^2}{r} \sin(\vartheta) \sin(\omega t - kr)$ ; $ B  = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{p_0 \omega^2}{r} \sin(\omega t - kr)$ | Energiedichte                                       | $w_{EM} = w_{el} + w_{mag} = \epsilon_0 \vec{E}^2$ |   |   |  |  |
| Abgestrahlte Leistung | $P = \oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{p_0^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^2} \sin^2(\omega t - kr) \Rightarrow \bar{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^2}$             | Induz. Spannung in Empfangsantenne                  | $U = El$   | Energiestromdichte; Intensität                      | $S = I = wc$  |  |  |
| Poynting vektor       | $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$   | E-Feld an Oberfl. eines gleichstromdurchfl. Drahtes | $\vec{E} = \frac{rI}{l} = \frac{\rho l}{r^2 \pi}$  | B-Feld an Oberfl. eines gleichstromdurchfl. Drahtes | $\oint B ds = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_t$ |  |  |

## Hohlraumresonatoren

|                           |  |   |  |  |  |  |  |
|---------------------------|--|---|--|--|--|--|--|
| Randbed Tangent. komp = 0 | $E_x = 0$ für $x = 0, c$ und $x = 0, b$<br>$E_y = 0$ für $x = 0, a$ und $x = 0, c$<br>$E_z = 0$ für $x = 0, a$ und $x = 0, b$  | Randbed stehende Wellen:  | $k_x = \frac{n\pi}{a}$<br>$k_y = \frac{m\pi}{b}$<br>$k_z = \frac{q\pi}{c}$<br>$ \vec{k}  = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$<br>$ \vec{k}  = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}}$<br>$\omega =  \vec{k}  c_0$ | $\vec{E} = \begin{pmatrix} A \cos(\frac{n\pi}{a} x) \sin(\frac{m\pi}{b} y) \sin(\frac{q\pi}{c} z) \\ A \sin(\frac{n\pi}{a} x) \cos(\frac{m\pi}{b} y) \sin(\frac{q\pi}{c} z) \\ A \sin(\frac{n\pi}{a} x) \sin(\frac{m\pi}{b} y) \cos(\frac{q\pi}{c} z) \end{pmatrix}$ |  |  |  |
| Grezfrequenz Würfel       | $ \vec{k}  = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2 + q^2} = \frac{\omega}{c_0}$<br>$\omega = \frac{c_0 \pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2 + q^2}$ | Volumen Kugeloktant mit Radius $ \vec{k} $ : $V_k = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} k_G^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^3$ | Anzahl Gitterpunkte mit EH-Vol $(a/\pi)^3$ : $N_G = \frac{\pi}{6} \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^3 \frac{a^3}{\pi^3}$   | Zwei Polarisationsrichtungen:  | Moden pro Vol.: $\frac{N}{V} = n = \frac{8\pi\nu^3}{3c_0^3}$ |  |  |

## Rechteckiger Hohlleiter

|   |   |
|---|---|
| Querschnitt $\Delta x \cdot \Delta y = a \cdot b$ ( $a > b$ );<br>Ausbreitung in z-Richtung   | $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y) \cos(\omega t - k_z z)$ ; $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} A \cos(k_x x) \sin(k_y y) \\ B \sin(k_x x) \cos(k_y y) \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $k_x = \frac{n\pi}{a}$ ; $k_y = \frac{m\pi}{b}$ ; $n, m$ ablesen aus $TE_{nm}$ |
| TE <sub>nm</sub> -Mode: E steht senkrecht auf z-Richtung  | TM <sub>nm</sub> -Mode: B steht senkrecht auf z-Richtung  |
| $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ ; $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ ; Grenzfrequ. wenn $k_z = 0 \Rightarrow \omega_g = c\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$   $TE_{10}$   Phasengeschw.: $v_{ph} = \frac{\omega}{k_z}$   Gruppengeschw.: $v_{gr} = \frac{c^2}{v_{ph}}$ |   |
| Schwächungslänge $\delta$ :   | Wenn $\omega < \omega_g$ , dann ist $k_z$ komplex: $k_z = i \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$ ; bzw. $ k_z  = \frac{1}{\delta} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$ ; nach $\delta$ Amplitude auf $\frac{1}{e}$  |

## Elektromagnetische Wellen im Vakuum

|  |   |   |
|--|---|---|
| Wellengleich. Für E-Feld in Vakuum ( $j=0, \rho=0$ ) | Maxwell 3: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$   $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$   $(\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ (Maxwell 4) $\Rightarrow$   | In Materie: $\Delta \vec{E} = \mu_r \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$<br>$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ |
| Wellengleich. Für B-Feld in Vakuum ( $j=0, \rho=0$ ) | Maxwell 4: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$   $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E}$   $(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})$ (Maxwell 3) $\Rightarrow$   |   |
| $\vec{B} \leftrightarrow \vec{E}$ :                  | $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \Rightarrow  \vec{B}  = \frac{k}{\omega}  \vec{E}  = \frac{1}{c}  \vec{E} $   Energie Dichte: $w_{EM} = \frac{\epsilon_0(E^2 + c^2 B^2)}{2} = \epsilon_0 E^2$   Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$   |   |
| EM-Welle ist transversal:                            | Ann: Ebene Welle in z-Richtung: $\vec{E} = \vec{E}(z) \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = 0 \dots$ (1) Maxwell 1 mit $\rho=0$ : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow E_z = const.$ , wähle $E_z = 0 \Rightarrow \vec{E} = (E_x, E_y, 0)^T \dots$ Transversalwelle: $\vec{E} \perp \vec{e}_z$ |   |
| Linear polarisiert                                   | $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$   Zirkular polarisiert: $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(\omega t - kz) \\ E_0 \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}$   $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})$ ; $B_0 = \frac{1}{c} E_0$   |   |
| Amplitude nach Polarisationsfilter                   | $E_1 = E_0 \cos(\alpha)$ $\alpha \dots$ Drehung des Filters zur Polarisation von $E_0$   Intensität: $I = \frac{W/t}{A} = \frac{P}{A} = \frac{W}{V} v = w_{EM} c = \epsilon_0 c \overline{E^2(t)} = \epsilon_0 c \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}^2(t) dt = \epsilon_0 c \left( \frac{E_0^2}{2} + \frac{E_0^2 y}{2} \right)$  |   |

## Elektromagnetische Wellen in Materie

|                                    |   |   |
|------------------------------------|---|---|
| Mikroskopisches klassisches Modell | Ann: Ebene Welle in z-Richtung, Polarisiert in x-Richtung. Jedes Atom-Elektron wird angeregt:<br>$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = -eE_0 e^{i(\omega t - kz)}$ ; $m \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{D}{m} x = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t} e^{-ikz}$   Ansatz $x = x_0 e^{i\omega t}$<br>$-\omega^2 x_0 e^{i\omega t} + i \frac{b}{m} \omega x_0 e^{i\omega t} + \frac{D}{m} x_0 e^{i\omega t} = -\frac{eE_0}{m} e^{i\omega t} e^{-ikz}$   $\frac{b}{m} \stackrel{def}{=} \gamma$ , $\frac{D}{m} \stackrel{def}{=} \omega_0^2$ , $z \stackrel{def}{=} 0 \Rightarrow -\omega^2 x_0 + i\gamma \omega x_0 + \omega_0^2 x_0 = -\frac{eE_0}{m}$<br>$x_0 (-\omega^2 + i\gamma \omega + \omega_0^2) = -\frac{eE_0}{m} \Rightarrow x_0 = -\frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega}$   $\frac{b}{m} \stackrel{def}{=} \gamma$ , $\frac{D}{m} \stackrel{def}{=} \omega_0^2$ , $z \stackrel{def}{=} 0 \Rightarrow -\omega^2 x_0 + i\gamma \omega x_0 + \omega_0^2 x_0 = -\frac{eE_0}{m}$<br>$x_0 = -\frac{eE_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma \omega} \Rightarrow x_0 = -\frac{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma \omega)e/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} E_0 = -(\alpha + i\beta) E_0 = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} E_0 e^{i\varphi}$<br>$x_0 = \frac{e/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}} E_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ mit $\varphi = -\arctan\left(\frac{\gamma \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$   Feld jedes Dipols mit $p = -ex$ : $E_D = -\frac{e\omega^2 x_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin(\vartheta) e^{i\omega(t-r/c)}$<br>$E(z) = -\frac{e\omega^2 x_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} e^{i\omega t} \Delta z \int_0^\infty N e^{-i\omega r/c} \frac{1}{r} \sin(\vartheta) 2\pi r dr \approx -i\omega \frac{\Delta z}{c} \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega)} E_0 e^{i\omega(t-z/c)}$ |   |
| Brechungsindex                     | $n = \frac{n' - ki}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$   $n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega)}$ N ... Ladungsträgerdichte $\gamma$ ... Dämpfungskonstante  | Optisch dünnes Medium: $n = \frac{c_0}{c'} \approx n' \approx 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma \omega)}$ |
| Leitendes Medium                   | $\omega_0 = 0 \Rightarrow n^2 = 1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0(i\omega - \omega^2 \tau)}$   Leitfähigkeit: $\sigma = \frac{Ne^2 \tau}{m_e} = \frac{Ne^2}{m_e \gamma} \left[ \frac{1}{\Delta \omega} \right]$   mittlere Stoßzeit: $\tau = \frac{1}{\gamma}$   Absorptionskoeffizient: $\alpha = \frac{4\pi k}{\lambda_0} \left[ \frac{1}{m} \right]$   Eindringtiefe: $\delta = \frac{1}{\alpha} [m]$   |   |
| $\omega \tau \ll 1$ ; leit. Med.:  | $n \approx (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}}$ ; $\alpha \approx \sqrt{\frac{2\omega \sigma}{\epsilon_0 c^2}}$  |   |
| $\omega \tau \gg 1$ ; leit. Med.:  | $n \approx \sqrt{1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}}$ ; $\alpha \approx \frac{2}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$  |   |
| Plasmafrequenz:                    | $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\epsilon_0 \tau}}$   Snellius: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$  |   |
| Fresnel Refl.koeff. Transm.k.      | $R_s = \frac{A_{rs}^2}{A_{ts}^2} = \left( \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} \right)^2 = \left( \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2$<br>$R_p = \frac{A_{rp}^2}{A_{tp}^2} = \left( \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \right)^2 = \left( \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right)^2$<br>$R(0) = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$   $T(0) = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$<br>Leitendes Medium: $R(0) = \frac{(n' - 1)^2 + \kappa^2}{(n' + 1)^2 + \kappa^2}$   |   |
| Brewsterwinkel $\alpha_B$ :        | Wenn $\alpha_B + \beta = 90^\circ \Rightarrow A_{rp} = 0$ ; $\alpha_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$   Totalreflexion: $n_1 > n_2$ : TotRef. wenn $\sin(\alpha) > \frac{n_2}{n_1}$  |   |

# Optik

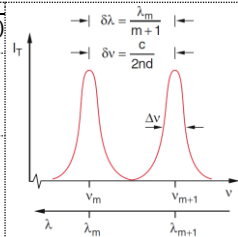
|  |   |  |   |   |   |                      |
|--|---|--|---|---|---|----------------------|
| Abbildungs-<br>gleichung<br>dünne Linse  | $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$<br>f ... Brennweite<br>g ... Gegenstandsweite<br>b ... Bildweite  | Brennweite<br>dünne Linse  | $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$  | Abbildungs-<br>maßstab  | $M = \frac{BB'}{AA'} = \frac{a}{b}$   |                      |
| Brennweite<br>dicke Linse  | $\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \right)$   | Haupt-<br>achsen:  | $h_1 = -\frac{(n-1)fd}{nR_2}$ ; $h_2 = -\frac{(n-1)fd}{nR_1}$   | Linse-<br>system  | $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1f_2}$ ; $h = \frac{d(f_1-f)}{f_1}$ |                      |
| Vergrößerun-<br>g  | $V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument } \varepsilon}{\text{Sehwinkel ohne Instrument } \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  | $V_{\text{Mikroskop}} = \frac{bs_0}{gf_1}$   | $V_{\text{Fernrohr}} = \frac{f_1}{f_2}$   | $V_{\text{Lupe}} = \frac{B/b}{G/s_0} = \frac{G/g}{G/s_0} = \frac{s_0}{g}$ | Deutl.<br>Sehweite  | $s_0 = 250\text{mm}$ |
| Mikroskop  |   | Kepler<br>Fernrohr   |   |   |   |                      |
| Strahlenweg<br>einzelne<br>Linse:  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <u>Achsenparallelen Strahl</u> vom Gegenstand zur Linse zeichnen.</li> <li>2. Der Strahl verlässt die Linse bei der Linsenachse so, dass er durch F' läuft</li> <li>3. <u>Mittelpunktstrahl</u> gerade vom Gegenstand durch den Mittelpunkt der Linse zeichnen</li> <li>4. <u>Brennpunktstrahl</u> durch F bis zur Linse führen, dort achsenparallel weiter bis zur horizontalen Position von F' zeichnen</li> <li>5. Nur zwei der drei Strahlen sind zur Konstruktion notwendig.</li> <li>6. Bei dicken Linsen verlaufen alle Strahlen zwischen den Linsenachsen achsenparallel.</li> <li>7. Wo sich die Strahlen schneiden, ist das Bild</li> </ol>   |  |   |   |   |                      |
| Strahlenweg<br>Linsensystem  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <u>Achsenparallelen Strahl</u> vom Gegenstand zur Linse zeichnen.</li> <li>2. Der Strahl verlässt die 1. Linse bei der Linsenachse so, dass er durch F1' läuft</li> <li>3. Strahl weiterführen bis Linse 2</li> <li>4. <u>Parallele Hilfsgerade</u> durch die Mitte von Linse 2 ziehen.</li> <li>5. Hilfsgerade weiter führen bis zur horizontalen Position von F2'. Dies sei der Punkt P.</li> <li>6. Der Strahl verlässt Linse 2 bei der Linsenachse Richtung Punkt P</li> <li>7. Wo der Strahl die waagrechte Achse schneidet, ist der gemeinsame Brennpunkt F des Linsensystems</li> <li>8. Wenn man den letzten Strahl Richtung Linse 1 zurückzeichnet, und mit dem achsenparallelen Strahl von Punkt 1 schneidet, bekommt man die Position der Hauptachse des Linsen-Gesamtsystems</li> </ol> |  |   |   |   |                      |
| Interferenz<br>am Spalt  | $I(\vartheta) = I_s \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ ; $x = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\vartheta)$  | Minima:  | $\sin(\vartheta_n) = \frac{n\lambda}{b}$ ; $n \in \mathbb{N}_+$   | Maxima:   | $\sin(\vartheta_n) = \frac{(2n+1)\lambda}{2b}$  |                      |
| Interferenz<br>am Gitter   | $I(\vartheta) = I_s \frac{\sin^2(x_1) \sin^2(x_2)}{x_1^2 x_2^2}$ ; $x_1 = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\vartheta)$ ; $x_2 = \frac{\pi d}{\lambda} \sin(\vartheta)$  |  |   |   |   |                      |
| Phasen-<br>verschieb.  | $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} + \delta\varphi$ ; $\delta\varphi = \begin{cases} \pi & \text{wenn } n_2 > n_1 \\ 0 & \text{wenn } n_2 \leq n_1 \end{cases}$  |  |   |   |   |                      |
| Auflösung : Rayleigh-Krit: Hauptmax.<br>von A darf nicht näher als 1. min. von B | $\delta_{min} = \frac{1,22 \lambda}{D_{Linse}}$   | Min.<br>Abst.  | $\tan \frac{\delta}{2} \approx \frac{\delta}{2} = \frac{d/2}{g} \Rightarrow \frac{d_{min}}{2g} = \frac{1,22 \lambda}{2 D_{Linse}} \Rightarrow d_{min} = \frac{1,22 \lambda g}{D_{Linse}}$ | Winkelauf-<br>lösungsverm   | $R_w = \frac{1}{\delta_{min}}$  |                      |
| Mikroskop Auf-<br>lösung Rayleigh:   | $d_{min} = \frac{1,22 \lambda g}{D_{Obj}} \approx \frac{1,22 \lambda f}{D_{Obj}} \left  \tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{D_{Obj}/2}{f} \Rightarrow d_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} = 1,22 \frac{\lambda_0}{2n \sin \alpha} = 0,61 \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha} = 0,61 \frac{\lambda_0}{NA} \right.$  |  |   |   |   |                      |
| Fernrohr Auf-<br>lösung Rayleigh:  | $\tan \left( \frac{\delta}{2} \right) = \frac{d/2}{g} \Rightarrow \frac{\delta}{2} \approx \frac{d}{2g} \Rightarrow \delta = \frac{d}{g} \left  \delta \stackrel{!}{=} \delta_{min} = \frac{1,22 \lambda}{D_{Linse}} \Rightarrow \frac{1,22 \lambda}{D_{Linse}} = \frac{d}{g} \Rightarrow d_{min} = \frac{1,22 \lambda g}{D_{Linse}} \right.$   |  |   |   |   |                      |
| Mikroskop Auf-<br>lösung Abbe:   | Doppelspalt<br>erstes Max.  | $\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} \left  \Delta\varphi \stackrel{!}{=} 2\pi \Rightarrow \Delta s = \lambda; \sin \alpha = \frac{\Delta s}{d} = \frac{\lambda}{d} \Rightarrow d_{min} = \frac{\lambda}{\sin \alpha} = \frac{\lambda_0}{n \sin \alpha} = \frac{\lambda_0}{NA} \right.$ |   |   |   |                      |

## Matrixmethode in der Optik

|                         |  |                       |  |   |
|-------------------------|--|-----------------------|--|---|
| Translations-<br>matrix | $\left. \begin{aligned} \frac{r_1 - r_0}{d} &= \tan(\alpha_0) \approx \alpha_0 \\ \alpha_1 &= \alpha_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$ | Brechung<br>an Kugel: |  | $\alpha - \alpha_1 = -\alpha_2 + \beta = \gamma = \frac{r_1}{R}$<br>Snellius: $n_1 \alpha = n_2 \beta$<br>$n_1(\gamma + \alpha_1) = n_2(\gamma + \alpha_2)$<br>$n_1 \left( \frac{r_1}{R} + \alpha_1 \right) = n_2 \left( \frac{r_1}{R} + \alpha_2 \right)$<br>$n_2 \alpha_2 = n_1 \alpha_1 + (n_1 - n_2) \frac{r_1}{R}$ |
| Dünne Linse<br>in Luft  | $\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$  | Reflexions-<br>matrix |  | $r_2 = r_1$<br>$\alpha_2 = 2\alpha + \alpha_1$<br>$\alpha_2 = 2(\alpha + \alpha_1) - \alpha_1$<br>$\alpha_2 = -2 \frac{r_1}{R} - \alpha_1$<br>$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$                  |

### Vielstrahl-Interferenz (Airy, Fabry-Pérot):

|   |   |
|---|---|
| $A = \pm  A_1  -  A_2  e^{i\Delta\varphi} -  A_3  e^{i2\Delta\varphi} -  A_4  e^{i3\Delta\varphi} \dots = \pm \sqrt{R} A_0 \mp \sqrt{R}(1-R) A_0 e^{i\Delta\varphi} \mp \sqrt{R}(1-R) R A_0 e^{i2\Delta\varphi} \mp \sqrt{R}(1-R) R^2 A_0 e^{i3\Delta\varphi} \dots$ $A = \pm A_0 \sqrt{R} (1 - (1-R) \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{i(m+1)\Delta\varphi}) = \pm A_0 \sqrt{R} (1 - (1-R) e^{i\Delta\varphi} \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{im\Delta\varphi}) = \pm A_0 \sqrt{R} (1 - (1-R) e^{i\Delta\varphi} \frac{1}{1 - R e^{i\Delta\varphi}})$ $A = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - R e^{i\Delta\varphi} - e^{i\Delta\varphi} + R e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - R e^{i\Delta\varphi} - e^{i\Delta\varphi} + R e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} = \pm A_0 \sqrt{R} \frac{1 - e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} \dots (1) \quad I_R = c \varepsilon_0 A A^* = c \varepsilon_0 A_0^2 R \frac{1 - e^{i\Delta\varphi}}{1 - R e^{i\Delta\varphi}} \frac{1 - e^{-i\Delta\varphi}}{1 - R e^{-i\Delta\varphi}} \Rightarrow$ |   |
| Airy-Formeln  | $I_R = I_0 \frac{F \sin^2(\Delta\varphi/2)}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)} \quad I_T = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(\Delta\varphi/2)}$ <p>mit <math>F = \frac{4R}{(1-R)^2}</math> und <math>\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda}</math> und <math>\Delta s = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)}</math></p>  |
| Fabry-Pérot<br>$\Rightarrow \alpha=0$   | <p>Freier Spektralbereich: <math>\delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{2nd}{m} - \frac{2nd}{m+1} = \frac{\lambda_m}{m+1}</math><br/> <math>\delta\nu = \frac{c}{\lambda_{m+1}} - \frac{c}{\lambda_m} = \frac{c}{2nd}</math></p> <p>Finesse: <math>F^* = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}</math></p> <p>HW-Breite: <math>\Delta\nu = \frac{c}{2nd} \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}</math></p> |



### Fourier-Reihen und Fourier-Transformation:

|  |  |
|--|--|
| $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \varphi_n = \arctan \frac{a_n}{b_n}$              |  |
| <p>Periode <math>2\pi</math>: <math>a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx</math>; <math>a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx</math>; <math>b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx</math></p>         | Zulässig ist Integration von beliebigem Startpunkt aus, wenn genau eine Periodendauer integriert wird (z.B. $-\pi$ bis $+\pi$ statt 0 bis $2\pi$ ) |
| <p>Periode <math>T</math>: <math>a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx</math>; <math>a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\frac{2\pi}{T} nx) dx</math>; <math>b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\frac{2\pi}{T} nx) dx</math></p> |  |
| Bei geraden Funktionen $f(-x)=f(x)$ nur $\cos(nx)$ -Terme, bei ungeraden Funktionen $f(-x)=-f(x)$ nur $\sin(nx)$ -Terme.   |  |
| Fourier-Transformation: $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$  |  |

### Sonstiges:

|  |  |  |  |   |  |
|--|--|--|--|---|--|
| Nabla Operator:                            | $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$   | Gradient von $f(\vec{r})$ :  | $\text{grad}(f(\vec{r})) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}$   | Divergenz von $\vec{v}(\vec{r})$ :<br>(wenn 0 $\Rightarrow$ quellenfrei)  | $\text{div} \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial z}$<br>$>0 \dots$ Quelle, $<0 \dots$ Senke, $0 \dots$ ohne Quelle und Senke<br>inkompressible Flüssigkeit: $\forall \vec{r}: \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = 0$ |
| Rotation von $\vec{v}(\vec{r})$ :          | $\text{rot} \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial y} - \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial z} - \frac{\partial v_z(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y(\vec{r})}{\partial x} - \frac{\partial v_x(\vec{r})}{\partial y} \end{pmatrix}$ | Wenn 0: wirbelfrei $\Rightarrow \exists$ Potential $\nabla\phi = \vec{v}(\vec{r})$ | $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ ("Gradientenfeld ist wirbelfrei")<br>$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ ("Feld der Rotation ist quellenfrei")<br>$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f$<br>$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$<br>$\vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} + f(\vec{\nabla} \times \vec{v})$<br>$\vec{\nabla} \times \vec{v} \times \vec{v} = \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v}$<br>$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{\nabla} g) = (\vec{\nabla} f) \cdot (\vec{\nabla} g) + \Delta fg$<br>$\vec{\nabla}(fg) = f(\vec{\nabla} g) + g(\vec{\nabla} f)$<br>$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{v}(\vec{\nabla} f)$<br>$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ("BAC-CAB-Regel") |   |  |
| Laplace-Operator von $f(\vec{r})$ (skalar) | $\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \text{div}(\text{grad}(f(\vec{r})))$<br>$\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f(\vec{r}))$<br>$\vec{\nabla}^2 f(\vec{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$   | Laplace-Operator vektoriell  | $\vec{\nabla}^2 \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_x(\vec{r}) \\ \Delta v_y(\vec{r}) \\ \Delta v_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$  |   |  |
| "Taylors" f. kleine x                      | $e^x \approx 1 + x; \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x; \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}; \frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{2}; \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}; \sin x \approx x; \tan x \approx x; \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$   |  |  |   |  |
| Komplexe Zahl                              | $z = a + bi; a =  z  \cos \varphi; b =  z  \sin \varphi$   |  | Polarform:   | $z =  z (\cos \varphi + i \sin \varphi) =  z e^{i\varphi};  z  = \sqrt{a^2 + b^2}; \varphi = \arctan \frac{b}{a}$ |  |
| Flächenelement in Kugelkoordinaten:        | $dA = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  | Kugelvolumen:  | $V_K = \frac{4}{3} \pi R^3$  | Kugeloberfl.:   | $A_K = 4\pi R^2$   |
| Brechungsindex:                            | $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_{ph1}}{v_{ph2}}$   |  |  |   |  |

# Physik I

Stand 15.08.2021

## Koordinatensysteme

|  |  |
|--|--|
| Kugel $\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y = r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z = r \cos \vartheta \end{pmatrix}; \det \left( \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} \right) = r^2 \sin \vartheta$ | Zylinder $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}; \det \left( \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right) = r; \left  \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right  = \sqrt{r^2 + z^2}$ |
|--|--|

## Kinematik

|   |   |
|---|---|
| Linear: $\vec{v} = \int \vec{a} dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t; \vec{s} = \int \vec{v} dt = \vec{s}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}}{2} t^2$   | Kreis: $\vec{\omega} = \int \dot{\omega} dt = \vec{\omega}_0 + \dot{\omega}t; \vec{\varphi} = \int \vec{\omega} dt = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\dot{\omega}}{2} t^2$ |
| Kreis→Lin. $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi f; s = r\varphi; \vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix}; \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ +r\omega \cos \omega t \end{pmatrix}; \vec{a}_t = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ | Frequenz: $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$   |
| Allg. Bew. $\vec{a} = \frac{d(v\vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_n = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$  |   |
| Rot. Syst: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{s}; \vec{a}' = \vec{a} + 2\vec{v}' \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{s} \times \vec{\omega}) = \vec{a} + \text{Coriolis} + \text{Zentrifugal}$  |   |
| Zentripetalbeschleunigung: $\vec{a}_z = -r\omega^2 \vec{e}_r$   |   |

## Newton

|   |   |   |
|---|---|---|
| Axiom 1: $\vec{p} = m\vec{v};$  | Axiom 2: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$   | Axiom 3: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \Rightarrow \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$ |
| Gravitation $\vec{F}_G = m\vec{g} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$   | Feldstärke: $\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_G}{m} = \vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$  | Potential $\phi = -\int \vec{g}(\vec{r}) d\vec{r} = -\frac{GM}{r}; \vec{g}(\vec{r}) = -\nabla\phi$  |
| Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}; \left[ \frac{kg m}{s} \right]$   | Drehimpuls: $\vec{L} = I\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) = m(\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m(\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) = m r^2 \vec{\omega}; \left[ \frac{kg m^2}{s} \right]$ |   |
| Kraft: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt}; \left[ \frac{kg m}{s^2} \right], [N]$   | Drehmoment $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}; [Nm] = \left[ \frac{kg m^2}{s^2} \right]$  |   |
| Arbeit: $W = \int \vec{F} d\vec{s} = \int P dt; [J] = [Nm] = [Ws] = \left[ \frac{kg m^2}{s^2} \right]$  | Arbeit: $W = \int \vec{D} d\varphi$   |   |
| Energie: $E_{pot}^{grav} = mgh; E_{pot}^{grav} = \phi m = -\frac{GmM}{r}; E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2 v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \frac{\partial E_{kin}}{\partial p} = \frac{p}{m} = v$   | Energie: $E_{rot} = \frac{1}{2} \int v(\vec{r}_\perp)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_\perp^2 dm = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2 I}{2I} = \frac{L^2}{2I}$  |   |
| Leistung: $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d \int \vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}; [W] = \left[ \frac{J}{s} \right] = \left[ \frac{kg m^2}{s^3} \right]$  | Leistung: $P = \vec{D} \cdot \vec{\omega}$  |   |
| Planetenbahn: $E_{pot} = -\frac{GMm}{r} \dots (1); E_{kin} = \frac{m\vec{v}^2}{2} \dots (2) \vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_t \vec{e}_t \Rightarrow v^2 = v_r^2 + v_t^2 \Rightarrow E_{kin} = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_t^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) \Rightarrow E_{kin} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \left( \frac{L}{mr^2} \right)^2) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} \dots (3) E = E_{pot} + E_{kin} = -\frac{GMm}{R} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m\dot{r}^2}{2} = E_{pot}^{eff} + E_{kin}^{rad}$ |   |   |

## Spezielle Relativitätstheorie

|  |  |   |
|--|--|---|
| Gamma: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \beta = \frac{v}{c}$  | $x = \gamma(x' + vt')$ $x' = \gamma(x - vt)$<br>Ort $y = y'$ $y' = y$<br>$z = z'$ $z' = z$ | Geschw. $v_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}}; v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x v}{c^2})}; v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{v'_x v}{c^2})}$<br>$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}; v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x v}{c^2})}; v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_x v}{c^2})}$ |
| Zeitpunkt: $t = \gamma \left( t' + \frac{v}{c^2} x' \right)$<br>$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right)$   | Dauer: $\tau = \gamma \tau_0$<br>Masse: $m = \gamma m_0$                                   | Länge: $l = \frac{l_0}{\gamma}$<br>Frequenz $f_B = f_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; f_R = f_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}; f_{traversal} = \frac{f_0}{\gamma}$  |
| Impuls: $\vec{p} = m(\vec{v}) \vec{v} = \gamma m_0 \vec{v} = \text{const.}$  |  | $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2 \dots \text{invariant}$  |
| Invariante $(c\tau)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (\Delta s)^2; (\Delta s)^2 > 0: \text{zeitartig}; (\Delta s)^2 < 0: \text{raumartig}; (\Delta s)^2 = 0: \text{lichtartig.}$ |  |   |
| Energie: $E = E_0 + E_{kin} = m_0 c^2 + mc^2 - m_0 c^2 = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}; E_{kin} = E - E_0 = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - m_0 c^2$                           |  |   |

## Schwerpunktsystem

|   |  |  |  |   |
|---|--|--|--|---|
| $\vec{r}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$  | $\vec{v}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{\vec{p}_{ges}}{M}$ | $\sum p_{is} = 0$  | $\vec{v}_i = \vec{v}_{is} + \vec{v}_s$<br>$\vec{v}_{is} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$ | Reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ |
| $E_{kin} = E_{kin}^{im SPS} + E_{kin}^{des SPS} = \frac{1}{2} \mu v_{12}^2 + \frac{1}{2} M v_s^2$ |  | Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{L}_S^{im SPS} + \vec{L}_{S0}^{des SPS}; \vec{L}_S = \sum m_i (\vec{r}_{is} \times \vec{v}_{is}) = \vec{r}_{12} \times \mu \vec{v}_{12}; \vec{L}_{S0} = M(\vec{r}_s \times \vec{v}_s);$ |  |   |

## Trägheitsmoment

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| $I = \int_K r^2 dm = \rho \int_K r^2 dV = \frac{m}{V_K} \int_K r^2 dV$ ; [kg m <sup>2</sup> ]   |  | $dV = dx dy dz = r^2 \sin \vartheta \cdot dr d\varphi d\vartheta = r \cdot dr d\varphi dz$ |  |
| I zusammensetzen aus Teilstücken mit bekanntem TM $dl = f(K)dm$ ; Rot.-Achse „passend“:   |  | $I = \int_K f(K) dm = \rho \int_K f(K) dV = \frac{M}{V} \int_K f(K) dV$                    |  |
| Steiner: $I' = I + mr^2$  | I zusammensetzen aus Teilstücken parallel zur Rot.-Achse R mit bekanntem Trägheitsmoment $I dm$ entlang einer Koordinate $k \perp R$ :   |  | $I' = \int_k \left( \frac{I}{dm} + k^2 \right) dm = \frac{M}{k_e - k_a} \int_{k_a}^{k_e} \left( \frac{I}{dm} + k^2 \right) dk$ |
| $V_{Kugel} = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta = \frac{4}{3} \pi R^3$ | $V_{Zyl} = \int_{z=0}^h \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r dr d\varphi dz = \pi R^2 h$   | $O_{Kugel} = 4\pi R^2$   |  |
| Massepunkt, Ring, Zylindermantel: $I = mr^2$  | Ring ( $\emptyset$ -Achse), Kreisscheibe, Vollzylinder: $I = \frac{m}{2} r^2$  | Hohlzylinder: $I = \frac{m}{2} (r_2^2 - r_1^2)$  | Stab (Achse durch MP) $I = \frac{m}{12} l^2$<br>Stab, Achse durch Ende: $I = \frac{m}{3} l^2$                                  |
| Kugelschale $I = \frac{2}{3} mr^2$  | Kreisscheibe ( $\emptyset$ -Achse) $I = \frac{m}{4} r^2$   | Quader (z-Achse): $I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$   | Vollzylinder, Achse $\perp$ Körperachse durch MM $I = \frac{m}{4} r^2 + \frac{m}{12} l^2$                                      |
| Kugel: $I = \frac{2}{5} mr^2$   | Messung I: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_A}{D_r}}$ ; $D_r: T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D_r}}$ ; $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + mr^2/2}{D_r}}$ ; $T_1^2 - T_0^2 = \frac{2\pi^2 mr^2}{D_r}$ |  |  |

## Rotation starrer ausgedehnter Körper

|  |  |  |   |
|--|--|--|---|
| Schwerpunkt: $\vec{s} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$ | Homogen: $\vec{s} = \frac{\rho}{M} \int_V \vec{r} dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV$  | Bew. eines Punktes im Körper mit $\vec{\omega}$ raumfest | $\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{v}_{is} = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{is})$ |
| Raumfeste Achse $\parallel \vec{e}_z$                                | $\vec{D} = (\vec{r}_\perp \times \vec{F}) = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_z + \vec{r}_\perp \times \vec{F}_t + \vec{r}_\perp \times \vec{F}_n$ ; $\vec{F}_z$ wird aufgefangen, $\vec{F}_t$ bewirkt $\vec{D}_\parallel$ zu Achse   |  |   |
| Drehimpuls:  | $d\vec{L} = \vec{r}_\perp \times d\vec{p} = \vec{r}_\perp \times (dm \vec{v}) = dm (\vec{r}_\perp \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\perp)) = dm (\vec{\omega} r_\perp^2 - \vec{r}_\perp (\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega})) = r_\perp^2 \vec{\omega} dm \Rightarrow \vec{L} = \int r_\perp^2 dm \vec{\omega} = I \vec{\omega}$            |  |   |
| BWGL:  | $\vec{D} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \ddot{\vec{\varphi}} \Rightarrow \ddot{\vec{\varphi}} = \frac{\vec{D}}{I}$ ; $\vec{\omega} = \int \ddot{\vec{\varphi}} dt = \frac{\vec{D}}{I} t + \vec{\omega}_0$ ; $\vec{\varphi} = \int \vec{\omega} dt = \frac{\vec{D}}{2I} t^2 + \vec{\omega}_0 t + \vec{\varphi}_0$     |  |   |
| Rollender Körper, kinetisch:   | $D = I \ddot{\omega} \Rightarrow mg \sin(\alpha) r = (I_s + mr^2) \frac{a}{r} \Rightarrow a = \frac{mg \sin(\alpha) r^2}{I_s + mr^2} = \frac{mg \sin(\alpha)}{I_s/r^2 + m}$  |  |   |
| Energie:   | $E_{pot} \triangleq E_{kin} + E_{rot} \Rightarrow mgs \sin(\alpha) = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{I\omega^2}{mv^2} \right) = \frac{mv^2}{2} \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right) \Rightarrow (v^2)' = \left( \frac{2g \sin(\alpha)}{1 + \frac{I}{mr^2}} s \right)' = av + va = 2av \Rightarrow \dots$ |  |   |

## Kreisel

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| Trägheitstensor:  | $d\vec{L} = dm (\vec{\omega} r_\perp^2 - \vec{r}_\perp (\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega}))$ (s.O.) $\Rightarrow \vec{L} = \int (\vec{\omega} r_\perp^2 - \vec{r}_\perp (\vec{r}_\perp \cdot \vec{\omega})) dm = \int r^2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} dm - \int (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dm$ |  |  |
| $L_x = \int r^2 \omega_x dm - \int (x^2 \omega_x + xy\omega_y + xz\omega_z) dm = \int (r^2 - x^2) \omega_x dm - \int xy\omega_y dm - \int xz\omega_z dm = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$   | $L_y = \int r^2 \omega_y dm - \int (xy\omega_x + y^2 \omega_y + yz\omega_z) dm = \int xy\omega_x dm - \int (r^2 - y^2) \omega_y dm - \int yz\omega_z dm = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$   |  |  |
| $L_z = \int r^2 \omega_z dm - \int (xz\omega_x + xy\omega_y + z^2 \omega_z) dm = \int xz\omega_x dm - \int yz\omega_y dm - \int (r^2 - z^2) \omega_z dm = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$   |   |  |  |
| $\vec{L} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}$                              | Energie:  | $E_{rot} = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} dm (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2) dm = \frac{\vec{\omega}^2}{2} \int r^2 dm - \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 dm \Rightarrow$ |  |
| $E_{rot} = \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \int r^2 dm - \frac{1}{2} \int (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)^2 dm \Rightarrow$  | $E_{rot} = \frac{1}{2} (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \int r^2 dm - \frac{1}{2} \int (x^2 \omega_x^2 + y^2 \omega_y^2 + z^2 \omega_z^2 + 2\omega_x \omega_y xy + 2\omega_x \omega_z xz + 2\omega_y \omega_z yz) dm \Rightarrow$   |  |  |
| $E_{rot} = \frac{1}{2} \omega_x^2 \int (r^2 - x^2) dm + \frac{1}{2} \omega_y^2 \int (r^2 - y^2) dm + \frac{1}{2} \omega_z^2 \int (r^2 - z^2) dm - \omega_x \omega_y \int xy dm - \omega_x \omega_z \int xz dm - \omega_y \omega_z \int yz dm \Rightarrow$ | $E_{rot} = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz}) + \omega_x \omega_y I_{xy} + \omega_x \omega_z I_{xz} + \omega_y \omega_z I_{yz} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}$  |  |  |
| Hauptträgheitsmomente   | Diagonalisierung von $\vec{I}$ (i.e. löse $\vec{I} - \lambda E = 0$ ) $\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_a \omega_a \\ I_b \omega_b \\ I_c \omega_c \end{pmatrix} = \vec{I}^* \cdot \vec{\omega}^*$                            |  | $I_a < I_b < I_c$ . Achsen a, b, c fixiert am Kreisel. $I(\omega)$ : Ellipsoid.  |
| Energie:  | $E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^* \cdot \vec{I}^* \cdot \vec{\omega}^* = \frac{1}{2} (\omega_a^2 I_a + \omega_b^2 I_b + \omega_c^2 I_c) = \frac{L_a^2}{2I_a} + \frac{L_b^2}{2I_b} + \frac{L_c^2}{2I_c} \Rightarrow$   |  | Rotation um Achse mit $E_{min} \triangleq$ Achse mit $I_{max}$ ( $r_{max}$ )   |
| Drallsatz   | $\vec{D} = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_K + (\vec{\omega}_K \times \vec{L}_K)$   | Euler gleich   | $D_a = I_a \frac{d\omega_a}{dt} + (I_c - I_b) \omega_b \omega_c$ ; $D_b = I_b \frac{d\omega_b}{dt} + (I_a - I_c) \omega_c \omega_a$ ; $D_c = I_c \frac{d\omega_c}{dt} + (I_b - I_a) \omega_a \omega_b$ |
| Nutation:   | äußeres $\vec{D} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$ ; Spitze von $\vec{L}$ liegt auf Schnittpunkt von Trägheitsellipsoid und Kugel $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \text{const.}$ ;  |  |  |
| Präzession  | sei $\vec{\omega} = \vec{L}$ und äußeres $\vec{D} = m\vec{g}\vec{r}$ . Dann: $d\vec{L} = \vec{D} dt = L d\varphi \Rightarrow  \vec{D}  = L \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow mgr = L\omega_p \Rightarrow \omega_p = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$  |  |  |

## Elastische Körper

|                        |   |  |   |
|------------------------|---|--|---|
| Hookesches Gesetz      | $F = EA \frac{\Delta L}{L} \Leftrightarrow \frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L} \Leftrightarrow \sigma = E \cdot \epsilon$                          | Elastizitätsmodul $[E] = \frac{N}{m^2}$ ; Zugspannung $[\sigma] = \frac{N}{m^2}$ ; Rel. Dehnung $[\epsilon] = 1$ |   |
| Biegepfahl             | $s = \frac{L^3}{3EB} F$   | Beiderseits eingespannt: $s_{max} = \frac{s}{16}$ (weil $\frac{F}{2}$ auf $2x \frac{L}{2}$ )                     | Deform.-arbeit: $W_{Def} = V \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} EV \epsilon^2$  |
| Flächenträgheitsmoment | $B = \iint z^2 dy dz; [m^4]$  | Rechteckbalken: $B = \frac{bd^3}{12} b = \frac{\Delta y}{\Delta z}$  | Rundbalken: $B = \frac{\pi}{4} R^4$<br>Rohr: $B = \frac{\pi}{4} (R_1^4 - R_2^4)$            |
| Schubmodul             | $G = \frac{\tau}{\alpha}$ mit $\vec{\tau} = \frac{F}{A}$ ; $\tau$ ... Scherspannung   | Richtmoment  | $D = -\frac{\pi GR^4}{2L} \varphi = -D_r \varphi$<br>$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\mu}{1+\mu}$ |
| Kompressionsmodul      | $F = -KA \frac{\Delta V}{V} \Leftrightarrow \Delta p = -K \frac{\Delta V}{V} \Leftrightarrow K = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} = -V \frac{dp}{dV}$ | Kompressibilität: $\kappa = \frac{1}{K}$   | Poissonzahl: $\mu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}; \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon(1-2\mu)$ |

## Flüssigkeiten und Gase

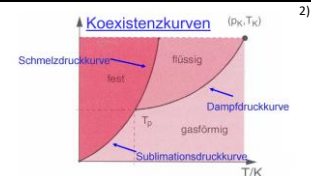
|                           |  |   |  |                               |                                     |  |          |  |
|---------------------------|--|---|--|-------------------------------|-------------------------------------|--|----------|--|
| Gasgleichung ideales Gas  | $pV = Nk_B T = nRT$  | $R = N_A k_B$<br>$N = n \cdot N_A$  | Hydrost. Druck   | $p(z) = \rho g(H-z)$          | Barom. Höhenf.                      | $p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$   | Auftrieb | $\vec{F}_A = -\vec{F}_{GFl}$ ; Eisberg:<br>$\rho_{Eis} V_{Eis} g = \rho_W V_{Eis}^W g$ |
| Statischer Druck:         | $p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}; [Pa] = \left[\frac{N}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{ms^2}\right]$  | Gesetz v. Hagen- Poiseuille: Strömung in Rohren   |  | Euler Gleichung ideale Flüss. |                                     | $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \cdot \vec{u} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} \dots (1)$<br>$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_p = m\vec{a} = \rho \Delta V \frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\vec{F}_G + \vec{F}_p}{\rho \Delta V} = \frac{\rho \Delta V \vec{g} - \nabla p \Delta V}{\rho \Delta V} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \dots (2) \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho}$ |          |  |
| Navier-Stokes             | $\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u}$   | Viskosität:   | $[\eta] = \frac{kg}{sm} = Pa \cdot s$ mit $F_r = -\eta A \left  \frac{du}{dy} \right $ | Reynoldszahl                  | $Re = \frac{2E_{kin}}{W_{reibung}}$ |  |          |  |
| Stromdichte (Flussdichte) | $j = \rho \cdot \vec{u} = \frac{dM}{dV} \frac{dx}{dt} = \frac{dM/dt}{A}$   | Massenstromstärke:  | $I = jA = \frac{dM}{dt} = \rho \vec{u} A = - \int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A}$       |                               |                                     |  |          |  |
| Kontinuitätsgleichung:    | $-\frac{\partial M}{\partial t} = \int_A \rho \vec{u} \cdot d\vec{A} \stackrel{Gau\beta}{=} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) \cdot dV; -\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ | Inkompress.   | $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$   |                               |                                     |  |          |  |
| Dyn. Druck (Bernoulli):   | $E = E_{pot} + E_{kin} = pV + \frac{1}{2} \rho V u^2 = const. \rightarrow p + p_s = p + \frac{1}{2} \rho u^2 = const.; p$ ... statischer Druck<br>$p_s$ ... Staudruck  | $u_1 A_1 = u_2 A_2$   |  |                               |                                     |  |          |  |
| Stokesches Gesetz         | $F_R = -6\pi\eta R \cdot \vec{u}$  | $F_G + F_A =  F_R  \Rightarrow \left(\frac{3}{4} \pi R^3\right) (\rho_K - \rho_{FL}) g = 6\pi\eta R u_{end} \Rightarrow u_{end} = \frac{2R^2(\rho_K - \rho_{FL}) g}{9\eta}$ |  |                               |                                     |  |          |  |

## Betrachtung auf Teilchenebene

|                                |  |   |   |  |
|--------------------------------|--|---|---|--|
| Maxwellsche Geschw. Verteilung | $f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$   | Wahrsch. Geschw.  | $u_w = \arg(\max(f(v))) = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$  |  |
| Mittlere Geschw.:              | $\bar{v} = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} u_w$   | Mittleres Geschw. quadrat   | $v_{rms} = \sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 f(v) dv} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ |  |
| Kalorische Zustandsgl.         | $E_{kin} = \frac{1}{2} k_B T$ (pro Freiheitsgrad); $E_{kin} = \frac{f}{2} k_B T$ (pro Teilchen) $\rightarrow \bar{U} = \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} nRT$ (für $N$ Teilchen od. $n$ Mol) |   |   |  |
| Freiheitsgr. Fluide            | $f = f_{trans} + f_{rot} + 2f_{vib}$   | $f_{trans} = 3; f_{rot} = \begin{cases} 2 \text{ (lineares Molekül)} \\ 3 \text{ (nicht lin. Molekül)} \end{cases}; f_{vib} = \begin{cases} 3n - 5 \text{ (lineares Molekül)} \\ 3n - 6 \text{ (nicht lin. Molekül)} \end{cases}$ |   |  |
| Freiheitsgr. Festkörper        | $f = 2f_{vib} = 2(3n - 6)$   |   |   |  |
| Mittlere Stoßzeit              | $\tau \approx \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma v_{rms}}; n = \frac{N}{V}; \sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 = \pi d^2$   | Mittlere freie Weglänge   | $\lambda \approx \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$   |  |

## Reale Gase (Van-der-Waals-Gleichung)

|   |  |                                      |  |                        |                                      |  |
|---|--|--------------------------------------|--|------------------------|--------------------------------------|--|
| $\left(p + \frac{n^2 a}{V_m^2}\right) (V_m - nb) = nRT$ | $a$ ... Stoffkonstante<br>$b = 4N_A V_a = 4N_A \frac{4\pi}{3} r_a^3$ | Krit. Temp.: $T_k = \frac{8a}{27Rb}$ | Krit. Druck: $p_k = \frac{a}{27b^2}$                   | Krit. Vol.: $V_k = 3b$ | $\frac{p_k V_k}{RT_k} = \frac{3}{8}$ | Oberh. der kritischen Temp. kann Gas nicht verflüssigt werden.   |
| Kalorische Zustandsgleichung:                           | $U = E_{kin} + E_{pot} = \frac{f}{2} RT - \frac{a}{V}$               | Molare Schmelzw.                     | $\lambda_{schm} = T \frac{dp}{dT} (V_{fl} - V_{fest})$ |                        | Boyle Temp.                          | $T_b = \frac{a}{bR}$<br>Bei $T_b$ verh. sich Gas annähernd ideal |



<sup>2)</sup> Abb. aus: Wolfgang Demtröder (2015): Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme. 7. Auflage. Springer, S. 215, mit Ergänzungen durch den Autor.



## Diffusion in Gasen und Wärmeleitung

|  |   |   |   |  |   |                         |  |
|--|---|---|---|--|---|-------------------------|--|
| Erstes Ficksches Gesetz<br>(Diffusion in x-Richtung)   | $j_x \equiv \frac{dN}{dA dt} \hat{e}_A = -D \frac{dn}{dx}$ ; $D = \frac{D\bar{v}}{3} = \frac{1}{n\sigma} \sqrt{\frac{8kT}{9\pi m}}$ | alle-<br>gemein:  | $\vec{j} = -D \text{ grad } n$          | 2. Ficksches Gesetz<br>(Diffusionsgleichung)   | $\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$ |                         |  |
| j...Teilchenstromdichte $\left[\frac{1}{m^2s}\right]$ ; N... Teilchenzahl; n... Teilchenkonz. $\left[\frac{1}{m^3}\right]$ ; D...Diff.konstante $\left[\frac{m^2}{s}\right]$ ; $\Lambda$ ...mittl. freie Weglänge; $\sigma$ ...Stoßquerschnitt |   |   |   |  |   |                         |  |
| Wärme-<br>strom:   | $I = \frac{dQ}{dt} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$ ; $\left[\frac{J}{s}\right]$   | Wärmelei-<br>t-fähigkeit  | $[\lambda] = \left[\frac{W}{Km}\right]$ | k-<br>Wert                                     | $k = \frac{\lambda}{d}$ ; $\left[\frac{W}{Km^2}\right]$                         | Wärmeüber-<br>gangszahl | $\kappa \triangleq k$ ; $[\kappa] = \left[\frac{W}{Km^2}\right]$ |
| Wärmewi-<br>derst. / m <sup>2</sup>  | $\frac{1}{k_{ges}} = \sum \frac{1}{k_i} + \sum \frac{1}{\kappa_i}$  | $\frac{\Delta T_i}{\Delta T_{ges}} = \frac{1/k_i}{1/k_{ges}} = \frac{k_{ges}}{k_i}$ | Wärme-<br>stromdichte                   | $q = k\Delta T$ ; $\left[\frac{W}{m^2}\right]$ |   |                         |  |

## Thermodynamik

|  |   |  |  |   |   |
|--|---|--|--|---|---|
| 1. HS  | Jedes System besitzt eine innere Energie U (extensive Zustandsgröße). Diese kann sich nur über den Transport von mechanischer Arbeit W und Wärme Q über die Systemgrenzen ändern. |  |  |   |   |
| Fundament-<br>algleich-<br>ung 1.HS  | $dU = d'Q + d'W$<br>$dU = d'Q - p dV$<br>$dU = T dS - p dV$   | d': Kein tota-<br>les Differential<br>(z.B. bei<br>konstantem<br>Druck)  | $dU$ ... Zunahme inn. Energie<br>$d'Q$ ... Zugeführte Wärme<br>$d'W$ ... Zugeführte Arbeit   | U ... Zustandsgröße<br>Q ... keine Zustandsgröße<br>W ... keine Zustandsgröße | Zugeführte Wärme $\Rightarrow$<br>Erhöhung Enthalpie<br>H=U+pV  |
| Isochor<br>V=const.  | $d'W = 0 \Rightarrow$<br>$(dU)_V = d'Q = n c_v dT$  | $c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{f}{2} N_A k_B = \frac{f}{2} R$ ... spez. Molwärme  <sub>V</sub>    | $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$  | Zugeführte Wärme $\Rightarrow$<br>Erhöhung von $U \triangleq Q \triangleq T$  |   |
| isobar<br>p=const.   | $(dH)_p = d'Q = dU - d'W =$<br>$n c_v dT + p dV = n c_v dT + n R dT$  | $c_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p = c_v + R = \frac{f}{2} R + R$   | $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$ $\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$  | Zugeführte Wärme $\Rightarrow$ Erhöhung der Enthalpie H=U+pV                  |   |
| isotherm<br>T=const.   | $dU = 0$ (bei i.G. $dU \propto dT$ )<br>$d'Q = -d'W$  | $\Delta W = N k_B T \ln \frac{V_2}{V_1} = N k_B T \ln \frac{p_2}{p_1}$   | $p_1 V_1 = p_2 V_2$  | Zugeführte Wärme $\Rightarrow$ Arbeit   |   |
| adiabat.<br>d'Q=0  | $d'Q = 0$<br>$dU = d'W$   | $TV^{\kappa-1} = \text{const.}$<br>$pV^\kappa = \text{const.}$   | $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f}$   | $\Delta W_{ad} = \frac{N k_B}{\kappa - 1} (T_2 - T_1)$                        | $\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{\kappa}}$ |
| polytrop   | $pV^n = \text{const.}; n = 0$ ... isobar; $n = 1$ ... isotherm; $n \rightarrow \infty$ ... isochor; $n = \kappa$ ... adiabat  | $\Delta Q = mc_v \frac{n - \kappa}{n - 1} (T_2 - T_1)$   |  |   |   |
| 2. HS  | $\eta = \frac{ \Delta W }{Q_{zugef}} = 1 - \frac{T_k}{T_w} < 1$   | Energie = Exergie + Anergie<br>$\Delta Q_w = -\Delta W - \Delta Q_k$   | Carnot-Prop.: $\frac{\Delta Q_w}{T_w} + \frac{\Delta Q_k}{T_k} = 0$  | Clausius: $\oint \frac{d'Q}{T} = 0$   |   |
| 3. HS<br>Entropie  | Entropie: Extensives Maß für Energie, die nicht für Arbeit verfügbar ist; für die Unordnung und die Multiplizität eines Systems.  |  |  |   |   |
|  | $dS = \frac{d'Q_{rev}}{T}$ ; $\oint dS = 0$   | $\Delta S = k_B \ln \frac{W_e}{W_a} \geq 0$ ; $S = k_B \ln W$  | W ... Anzahl mögl. Zustände; S ... Zustandsgröße   |   |   |
| <b>Fundamentalgl. („FG“)</b>   | <b>Enthalpie H</b>  | <b>Helmholtz'sche freie Energie F</b>  | <b>Freie Enthalpie („Gibbs'sche freie Energie“) G</b>  |   |   |
| Innere Energie = zugef.<br>Wärme + zugef. Arbeit<br>$dU = d'Q + d'W$<br>$dU = T dS - p dV$ | $H \equiv U + pV \xrightarrow{\text{abl.FG einsetz.}}$<br>$dH = T dS + p dV + V dp$<br>dp=0: Energ., um U um dU<br>zu erh., wenn ein Teil der<br>Energ. für p dV verw. wird.      | $F \equiv U - TS \xrightarrow{\text{abl.FG einsetz.}}$<br>$dF = -S dT - p dV$<br>Extensives thermod. Potential:<br>$dF \leq 0$ | $G \equiv H - TS$<br>$G \equiv U + pV - TS \xrightarrow{\text{abl.FG einsetz.}}$<br>$dG = -S dT + V dp$<br>Extensives thermod. Potential:<br>$dG \leq 0$ |   |   |

## Schwingungen

|   |  |  |   |
|---|--|--|---|
| <b>Freie ungedämpfte Oszillatoren</b>   | Mathematisches Pendel  | Physikalisches Pendel  | Torsionspendel  |
| Feder-<br>pendel<br>$ma = -Dx$<br>$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$   | $ma = -mg \sin \varphi$<br>$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$   | $I\ddot{\varphi} = -mgd \sin \varphi$<br>$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ | $D = -T\varphi$<br>$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$  |
| $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_{ruhe}}}$   | $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  | $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$  | $\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{I}}$   |
| <b>Freie gedämpfte Oszillatoren</b>   | Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$   |  | Log. Dekrement  |
| Stokesch<br>e Reibung<br>$ma = -bv - Dx$<br>$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$              | $x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) = e^{-\gamma t} A \cos(\omega t + \varphi)$<br>$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ ; $\varphi = -\arctan \frac{c_2}{c_1}$ ; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ |  | $\delta = \gamma T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$<br>nach $\tau = \frac{1}{\delta}$ ist $A = A_0 \frac{1}{e}$ |
| $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}; \gamma = \frac{b}{2m}$  | Starke Dämpfung $\gamma > \omega_0$ ; $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$   |  |   |
| $x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})$ ; $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ | Aperiodischer Grenzfall: $\gamma = \omega_0$ ; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$<br>$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 + c_2 t)$   |  |   |
| <b>Erzwungene Schwingung</b>  | $ma = -bv - Dx + F_0 \cos \omega t$  | Phasenverschiebung   | Amplitude   |
| $ma = -bv - Dx + F_0 \cos \omega t$<br>$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = K \cos \omega t$     | $x(t) = A_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi) + A_2 \cos(\omega t + \varphi)$<br>$K = F_0/m$ ; $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ ; $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$                             | $\varphi = \arctan \left( -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$    | $A_2(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$                        |

## Wellen

|                                   |   |   |  |   |
|-----------------------------------|---|---|--|---|
| Ebene Welle in z-Richtung:        | $\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{ph}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  | Allg. Lsg: $\xi(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right)$      | Longitudinal in festem Körper: $v_{ph}^2 = \frac{E}{\rho}$   | Transversal in Festkörper: $v_{ph}^2 = \frac{G_m}{\rho}$  |
| Harm. Welle in z-Richtung:        | $\xi(z, t) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{v}\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi f z}{v}\right) = A \sin\left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda}\right) = A \sin(\omega t - kz); k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (Wellenzahl) |   |  |   |
| Gassäule (nur longitudinal!)      | $v_{ph}^2 = \frac{K_m}{\rho} = \frac{\kappa p}{\rho};$  | $K_m \dots$ Komp. modul<br>$\kappa \dots$ <i>Adiabat. Idx.</i>                              | Transversal, gesp. Saite: $v_{ph}^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{\sigma}{\rho}; \mu = \frac{m}{l}$  | $\frac{p}{\rho} = \frac{pV}{nM} = \frac{nkT}{nm} = \frac{kT}{m} \Rightarrow v_{rms} = v_{ph}\sqrt{3}$ |
| Dispersion: $v_{ph} = f(\lambda)$ | $v_{ph} = \frac{\omega}{k}; k = \frac{2\pi}{\lambda}$   | Gruppen-<br>geschw.: $v_G = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}$ |  |   |
| Stehende Welle                    | Freies Ende: $\xi(z, t) = 2A \cos(k_n z) \cos(\omega t)$<br>Festes Ende: $\xi(z, t) = 2A \sin(k_n z) \sin(\omega t)$  | $k_n = \frac{2\pi}{\lambda}$  | 2x offen $\vee$ 2x fest: $\lambda_n = \frac{2l}{n}; f_n = n \frac{v}{2l}; n \in \mathbb{N}_+$<br>1x offen $\wedge$ 1x fest: $\lambda_n = \frac{4l}{2n-1}; f_n = (2n-1) \frac{v}{4l}; n \in \mathbb{N}_+$ |   |
| Doppler:                          | Beob. zur Quelle<br>Sender zum Beob. $f = f_0 \frac{1+v_b/c}{1-v_s/c}$  | Beob. von Quelle weg<br>Sender von Beob. weg $f = f_0 \frac{1-v_b/c}{1+v_s/c}$              | Reflektor bewegt sich zum Beob. $f = f_0 \frac{c+v}{c-v}$  | vom Beob. weg: $f = f_0 \frac{c-v}{c+v}$  |

## Sonstiges

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| Kepler: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}; \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ | Reibung: $F_R = \mu F_N$  | Wärmeausdehnung: $\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T; [\alpha] = \left[\frac{1}{K}\right]$              | $V = V_0(1 + \alpha \Delta T)^3$<br>$V \approx V_0(1 + \gamma \Delta T)$<br>$\gamma = 3\alpha$ |
| $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \sin \alpha$ (0 wenn   )     | $ \vec{a} \cdot \vec{b}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \cos \alpha$ (0 wenn $\perp$ ) | $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ | $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$                             |